PREMISA

Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)

ISSN EN TRÁMITE

Año 20 - Nº 76

Febrero 2018

SOAREM Personería Jurídica: Resolución Nº 000530 del 31-05-1999
Correo electrónico: soarem1@gmail.com Página web: www.soarem.org.ar

El 31 de octubre de 1998 se creó la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM). La Revista Premisa de SOAREM es una publicación trimestral que se distribuye gratuitamente entre los socios. Contiene artículos sobre distintos temas de matemática desde el nivel inicial al universitario, tratamientos didácticos, experiencias, investigaciones, etc.

Revista Premisa: ISSN: EN TRÁMITE

Página web: www.soarem.org.ar

PREMISA
Nº 76

Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática **(SOAREM)**
Número de Edición: 76
Fecha de Edición: Febrero 2018
Directora: Chistiane Ponteville
Propietario: SOAREM

PREMISA
Año 20
Nº 76
Febrero 2018
ISSN EN TRÁMITE

ÍNDICE

EDITORIAL

En el presente número de Premisa, se acercan a nuestros lectores cuatro artículos en los que sus autores ofrecen resultados de investigaciones y propuestas para el aula de matemática.

Susana Beatriz Ruiz, María Inés Ciancio, Sebastián Correa Otto, de Argentina, abren este número con una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo integral y el empleo adecuado de TIC´s presentando una guía de actividades, con apoyo de diferentes recursos tecnológicas.

Juan C. Piceno, de México, presenta un trabajo en el que realiza un análisis del tratamiento metodológico al planteamiento y resolución de problemas de carácter lógico – matemático, motivando el estudio de la matemática a través del juego.

A continuación, Leonardo Santiago Vinces Llaguno, Daniel Octavio Santillán Vozmediano, Moisés Arturo Menace Almea y Byron Wladimir Oviedo Bayas, desde Ecuador, describen los resultados de una investigación que tiene por objetivo potenciar el aprendizaje de las inecuaciones lineales en los estudiantes de la asignatura de Matemática.

Y cerrando este número, Vicente Messina, Marina Revelli, Isabel Pustilnik, Carlos Pano, de Argentina, a partir de un capítulo de un libro, discutiendo algunas concepciones sobre la matemática y sus efectos en la enseñanza y el aprendizaje y se analizan las concepciones subyacentes en el texto.

Comité Editorial – Revista Premisa

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO INTEGRAL Y EL EMPLEO ADECUADO DE TIC´S

Susana Beatriz Ruiz,
María Inés Ciancio, Sebastián Correa Otto

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales
Universidad Nacional de San Juan, Argentina

sbruizr@yahoo.com.ar , miciancio@hotmail.com , s.correaotto@gmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 4/02/17, FECHA DE ACEPTACIÓN: 6/11/17

RESUMEN

En este trabajo se presenta una guía de actividades, con apoyo de diferentes herramientas TICs, en cuya resolución se realizan cálculos, representaciones gráficas, comparan y analizan resultados cuando las salidas del ordenador difieren de los cálculos obtenidos de manera manual empleando la teoría matemática. En particular, la guía se centra en el cálculo de integrales indefinidas. Este tipo de propuestas pueden resultar provechosas para la enseñanza sobre el "empleo adecuado" de TICs y la profundización de los contenidos involucrados.

ABSTRACT

This contribution presents an activity guide supported by different ICT tools. Solving the guide comprises performing calculations, graphical representations, comparing and analyzing results when the output of the computer software differs from the calculations obtained manually through the use of mathematical theory. In particular, the activity guide is centered on solving indefinite integrals. This type of proposals may result helpful for teaching on the "adequate usage" of ITC tools and for granting a deeper understanding of the involved content.

PALABRAS CLAVE:

Cálculo integral – tecnología - enseñanza

KEYWORDS:

Calculus - technology - teaching

INTRODUCCIÓN

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs), en particular el uso de ordenadores, en estas últimas décadas, están atravesando nuestra vida, cambiando nuestras visiones del mundo y modificando los patrones de acceso al conocimiento y de interacción interpersonal. Progresivamente, se han ido incorporando en los diseños curriculares de todos los niveles de la enseñanza formal y no formal (Zangara, 2009), tanto en el nivel inicial, medio y superior. El uso de ordenadores se vislumbra actualmente como un medio de enseñanza donde se pueden crear entornos de aprendizaje útiles para la enseñanza de distintas ciencias, en particular la Matemática.

Entre las tareas claves del docente de hoy, resulta fundamental enseñar a sus estudiantes a convertirse en lectores críticos del material que disponen, seleccionan y trabajan; a chequear la fuente de la cual proviene la información; a validar o no la calidad de esos contenidos y/ o resultados. En el caso de las TIC´s, "no es lo mismo ser usuario de PC que lograr transmitir efectivamente a los alumnos el "buen uso" de determinadas herramientas tecnológicas como recursos para trabajar la información y elaborarla a través de un proceso de aprendizaje." (Hernaiz, 2010). Para ello es fundamental que el docente realice actividades tendientes a analizar críticamente las herramientas TICs que se disponen, pudiendo destacar ventajas y desventajas en su uso, estableciendo diferencias y similitudes, cuestionando los resultados en base a los obtenidos aplicando las teorías científicas correspondientes, a los fines de aprovechar estos recursos educativos en forma óptima para la enseñanza.

El presente trabajo se enmarca en este contexto. Presenta un material didáctico, denominado "Guía de Actividades con Software", para ser desarrollada por alumnos que cursan las asignaturas "Análisis Matemático II" de las carreras de Licenciatura en Astronomía y Licenciatura en Geofísica de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan. Dichos alumnos poseen conocimientos previos sobre el cálculo diferencial e integral de una variable. La temática abordada se centra en profundizar aspectos relacionados al cálculo de integrales indefinidas, mediante la comparación de resultados, aplicando la teoría del Cálculo Diferencial e Integral y Sistemas Algebraicos de Cómputo (CAS).

Los CAS son herramientas TICs que permiten ejecutar operaciones entre expresiones matemáticas en una forma similar a las operaciones manuales tradicionales de matemáticos o científicos, manipular expresiones algebraicas y representar gráficamente funciones. En el modelo de guía propuesto se emplean sistemas algebraicos que tienen como característica común: ser de acceso libre, de utilidad y aplicabilidad para el cálculo diferencial e integral, tanto a nivel medio como superior.

Respecto al empleo de CAS, en el cálculo de antiderivadas, en general resultan ser herramientas muy eficaces, en especial cuando se presentan cálculos engorrosos.

Resulta pertinente destacar, a nuestro parecer, el uso del software proporciona un importante instrumento para que los estudiantes puedan liberarse de memorizar fórmulas o procedimientos de cálculo, aunque es fundamental tener en cuenta que los estudiantes necesitan un cierto tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual segura de los conceptos. Necesitan prestar atención al proceso de transformación y relación que pueden establecerse entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas (Camacho, 2005, p. 108).

"Sin embargo, existen casos donde los resultados del CAS difieren a los obtenidos con lápiz y papel usando la teoría, lo cual puede influir de diversas maneras. Lo idóneo es analizar el porqué de esta diferencia" (Ponce y Rivera, 2011, p. 87).

En la selección de las actividades, en el material didáctico, se tiene en cuenta que se presenten bajo planteos simples y sencillos, que puedan resolver los alumnos con la guía y el apoyo del docente, en donde le sea útil aplicar los conocimientos previos correspondientes al cálculo diferencial e integral, como así también CAS apropiados; y tiendan a contribuir en la formación disciplinar del alumno.

MATERIAL DIDACTICO ELABORADO

Del material elaborado como propuesta de actividades, se pueden distinguir:

- a) Un planteo general introductorio donde se enuncian los objetivos generales que se persiguen al resolver la guía; la temática general a abordar, la metodología de trabajo y el material de apoyo que disponen para realizar las actividades.
- b) Actividades de cálculo, análisis y comparación de resultados (estas actividades invitan al alumnos a pensar, establecer relaciones, reflexionar entorno a los resultados obtenidos empleando TICs y el uso adecuado de las mismas en el cálculo de integrales indefinidas);
- c) Un espacio para el análisis, debate y reflexión de las tareas desarrolladas.

MODELO DE ACTIVIDADES PROPUESTA

"Guía de Actividades con Software"

Introducción: A continuación, se presentan distintos planteos para el cálculo de primitivas. El objetivo de la guía es que puedas profundizar sobre aspectos relacionados al cálculo de funciones primitivas en integración y contribuir en la capacitación sobre el uso adecuado de software y/o programas para el cálculo infinitesimal e integral.

Es recomendable que resuelvas las actividades, en primer instancia, utilizando lápiz y papel, empleando los conocimientos previos ya adquiridos oportunamente de análisis diferencial e integral para funciones reales de variable real (puedes consultar, si lo requieres, apuntes de clase y/o material bibliográfico de referencia de la cátedra); luego utilizando Sistemas Algebraico de Cálculo (CAS). En la guía está previsto que apliques sistemas que tienen como características comunes: ser libres, de fácil acceso (tanto para docentes como alumnos e investigadores) y simples de utilizar, por ejemplo:

- 1)Wolfram Alpha (buscador de respuestas desarrollado por la compañía Wolfram Research, basado en Mathematica) ;
- 2) Symbolab (Apps en Educación. Motor de búsqueda libre diseñado para los matemáticos, científicos, estudiantes).
- 3) GeoGebra (software matemático interactivo para la educación en colegios y universidades).
- 4) wxMaxima (sistema bastante completo basado en el programa DOE-MACSYMA).

> En general, los algoritmos utilizados en estos programas son eficientes métodos que en ocasiones entrañan relaciones matemáticas mejor conocidas por los expertos programadores que por los matemáticos.
>
> También suele ocurrir que los CAS empleen métodos que producen resultados más complejos a los obtenidos con lápiz y papel o incluso llegan a producir resultados erróneos aún en casos simples (Ponce y Rivera, 2011, p. 85).

Actividad 1:

i) Lea atentamente las siguientes definiciones de antiderivada proporcionada por autores de referencia.

"Una función F se denomina antiderivada de la función f en un intervalo I, si para todo valor x perteneciente a I." (Leithold, 1994).
"Una función F(x) es antiderivada de f(x) si F/(x)=f(x) para todo x del dominio de f." (Larson, y Hostetler, 1989).

ii) Analiza la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de ser inválido, justifica la respuesta.

- *a)* $F(x)=x^2$ *tiene el mismo dominio de definición de* $f(x)=2x$.
- *b)* $F(x)=x^2$ *es antiderivada de* $f(x)=2x$.
- *c)* $F(x)=\frac{x^4+3x}{x}$ *tiene el mismo dominio de definición de* $f(x)=3x^2$.
- *d)* $F(x)=\frac{x^4+3x}{x}$ *es antiderivada de* $f(x)=3x^2$.
- *e)* $F(x)=x^3+C$ *con C=cte. es antiderivada de* $f(x)=3x^2$.

"Si F(x) es la antiderivada de f(x) en un intervalo I entonces cada antiderivada de f en I es F(x) +C, donde C es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de f en I pueden obtenerse en la forma F(x)+C asignando valores particulares a C."
(Leithold, 1994)

Actividad 2:
Tenga en cuenta el siguiente resultado:

Es claro que $F(x)=x^2$ es antiderivada de $f(x)=2x$. a) Es cierto que $F(x)=x^2+1$ es antiderivada de f(x)? ; b) ¿ y $F(x)=x^2+2$? ; c) Compare las gráficas de las antiderivadas de $f(x)=2x$ y caracterice las mismas desde el punto de vista geométrico.

Actividad 3:
Considere los Teoremas Fundamentales del Cálculo:

Primer teorema fundamental del cálculo:
Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y sea x cualquier número de [a,b]. Si F es la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(t).$

Segundo teorema fundamental del Cálculo:
Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y sea g una función tal que $g'(x) = f(x)$ *para todo x en [a,b]. Entonces*

$$\int_a^x f(t)\, dt = g(b) - g(a).$$

Resuelva las siguientes integrales indefinidas aplicando reglas y/o métodos de integración apropiados:

- 1) $\int (2x + \cos(3x))\, dx$
- 2) $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$
- 3) $\int \cos^2(x)\, dx$
- a) Utilizando lápiz y papel.
- b) Empleando CAS.
- c) Compare los resultados obtenidos en a) y b).

Actividad 4:

a) Compruebe que $\int \frac{\cos(2x)}{sen\,(x).\cos(x)}\, dx = In\left|sen\,(2x)\right| + C$

b) La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos al calcular la antiderivada para la integral del apartado anterior,

a) $\int \frac{\cos(2x)}{sen\,(x).\cos(x)}\, dx$

utilizando distintos softwares libres para el cálculo diferencial e integral.

Softwares libres	$\int \frac{\cos(2x)}{sen\,(x).\cos(x)}\, dx$
MÁXIMA	log (sin(x)) + log (cos (x))
GeoGebra	$2\left(-\frac{1}{2}\,In\left(\frac{-\cos(x)+1}{\cos(x)+1}+\frac{\cos(x)+1}{-\cos(x)+1}+2\right)+\frac{1}{4}\,In\left(\frac{-\cos(x)+1}{\cos(x)+1}+\frac{\cos(x)+1}{-\cos(x)+1}-2\right)\right)$
Symbolab	$-\ln\left|\tan(x)\right| + 2\ln\left|sen(x)\right|$
WolframAlpha	log(sin(x))+log(cos(x))

Tabla 1: Antiderivadas para la integral planteada, utilizando distintos CAS libres

Compare los resultados de la Tabla 1, analice dominios de definición en cada caso y saque conclusiones.

Actividad 5:

La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos al calcular la antiderivada de

$f(x)=\frac{tg(x)}{\ln(\cos(x))}$ utilizando distintos programas libres.

a) Resuelva la integral planteada, $\int \frac{tg(x)}{\ln(\cos(x))}dx$ con lápiz y papel, y compare su respuesta con la que se muestra en la Tabla 2 bajo el título de "solución teórica".

b) Analice los dominios de definición de las funciones primitivas propuestas en la Tabla 2.

Compare respuestas y escriba conclusiones.

Softwares libres	$\int \frac{tg(x)}{\ln(\cos(x))}dx = \ln\left\| In(\cos(x)) \right\| + C$ *(solución teórica por el método de sustitución)*
MAXIMA	-log(log(cos(x)))
GeoGebra	$\ln(\ln((-\tan(x/2)^2+1)/(\tan(x/2)^2+1)))$
Symbolab	-log|log(cos(x))|
WolframAlpha	-log(log(cos(x)))

Tabla 2: Antiderivadas para la integral planteada, empleando distintos CAS libres.

Actividad 6:

Espacio para expresar sus vivencias respecto a las actividades desarrolladas.

Indique aspectos positivos y negativos de esta experiencia.

MUESTRA DE ALGUNAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS POR LOS ALUMNOS

Para realizar las distintas actividades de la Guía, los alumnos tratan de resolver grupalmente, utilizando lápiz y papel, las distintas actividades solicitadas, teniendo en cuenta los conocimientos previos impartidos por las asignaturas, como así también el material bibliográfico y de referencia propuesto para las actividades. Respecto a los cálculos y gráficos con ayuda de software fueron guiados, en general para su realización, con el apoyo de docentes en el gabinete de computación, ya que representaban un nuevo desafío para realizar sus actividades.

En cuanto a la Actividad 1, al analizar grupalmente las afirmaciones para responder sobre la validez de las mismas, los alumnos realizaron cálculos de derivadas, determinaron dominios de definición y valoraron la importancia de tener en cuenta dichos dominios a la hora de responder a los cuestionamientos planteados.

En la Actividad 2, realizaron las representaciones graficas y pudieron visualizar gráficamente el efecto de la constante de integración en la búsqueda de soluciones con la integral indefinida planteada.

En la Actividad 3 los alumnos resuelven con lápiz y papel las integrales, aplicando propiedades, integrales básicas elementales, sustituciones trigonométricas y el método de sustitución. Luego de calcular las primitivas, con ayuda de distintos software, observan que las expresiones que proporcionan son las mismas al dar sus respuestas. En algunos casos, no coinciden con las obtenidas inicialmente a mano empleando la teoría. En los casos en que los resultados no coinciden, comprueban que dichas soluciones son correctas trabajando algebraicamente y considerando igualdades trigonométricas.

En la Actividad 4, al tener en cuenta la identidad trigonométrica
$sen(2x)= 2\ sen(x).\ cos(x)$, y aplicar el método de sustitución comprueban:

$$\int \frac{cos(2x)}{sen\ (x).cos(x)}\ dx = \ln\left|sen\ (2x)\right|+C.$$

A partir de apreciar diferencias en los resultados dados en la Tabla 1, para abordar la problemática de si son respuestas correctas o no, los alumnos tienen en cuenta la definición de antiderivada. En primer lugar, para cada función primitiva F(x) propuesta, verifican la igualdad $F'(x)= \frac{cos(2x)}{sen\ (x).cos(x)}$, derivando directamente cada primitiva propuesta.

Posteriormente analizan si las igualdades anteriores se cumplen para todo x del dominio de $f(x)= \frac{cos(2x)}{sen\ (x).cos(x)}$, construyendo los graficos con la ayuda del software libre Gnuplot, con la guía y apoyo del personal de la cátedra.

La Figura 1 corresponde a la solución obtenida con lápiz y papel, mientras que la Figura 2 a las obtenidas utilizando los sistemas algebraicos citados en la Tabla I.

Los alumnos comparan los dominios de las primitivas en los casos b) y c) de la Figura 2, con la obtenida en forma manual representada en la Figura 1. Observan que estos dominios coinciden con dominio de la función a integrar representada en la Figura 3.

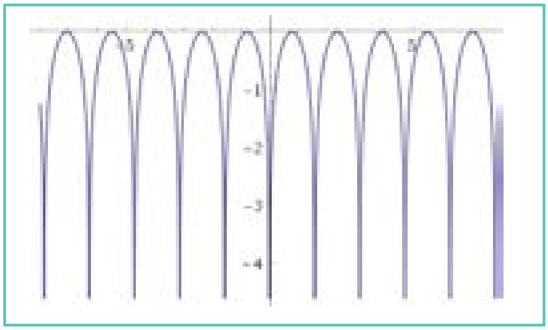
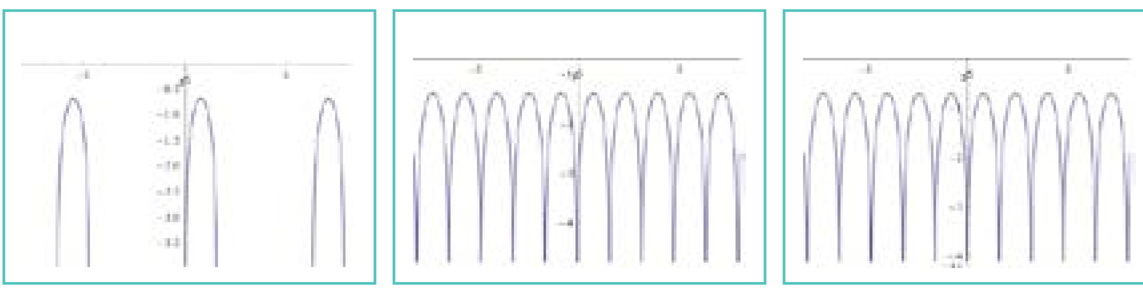


Figura 1: Grafica de la primitiva F(x)= ln|sen (2x) |



a) b) c)

Figura 2: Primitiva obtenida mediante a) Maxima y WolframAlpha; b) GeoGebra; y c) Symbolab

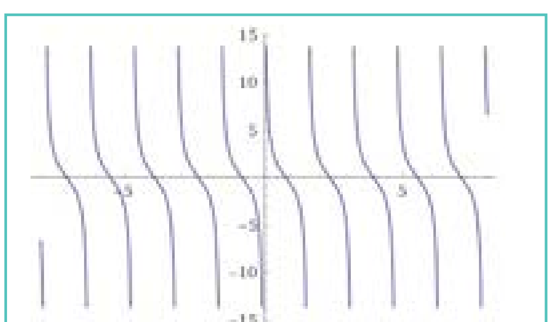


Figura 3: Gráfica de la función f(x)=cos(2x)/ sen(x). cos(x)

Teniendo en cuenta la definición de la antiderivada, concluyen además que la función representada en la Figura 2 a), correspondiente a soluciones propuestas utilizando wxMaxima y WolframAlpha no representan soluciones generales a la integral indefinida del Planteo 1.

En la Actividad 5, resuelven $\int \frac{\mathrm{tg}(x)}{\ln(\cos(x))}\,dx$ aplicando el método de sustitución, considerando t= ln(cos(x)). Luego teniendo en cuenta la Tabla 2, observan claramente que el programa Symbolab proporciona una primitiva que coincide con la hallada utilizando lápiz y papel. Por otro lado prestan atención en que la respuesta proporcionada por wxMaxima es la misma a la proporcionada al aplicar WolframAlpha. En cuyo caso, al análizar el dominio de definición de F(x)=-log(log(cos(x))) y comprobar que es vacío, concluyen que las soluciones proporcionadas por ambos softwares son inapropiadas.

Respecto a la primitiva propuesta por GeoGebra, pudieron ver que tang(x/2) está definida para los x tales que cos(x/2)≠0, o sea x≠ π+ 2kπ con k entero. Al considerar los valores x tales que cos(x/2)≠0, y trabajar algebraicamente teniendo en cuenta identidades trigonométricas comprobaron que $-\ln(\ln((-\tan(x/2)^2+1)/(\tan(x/2)^2+1))) = -\log(\log(\cos(x)))$. Por lo que concluyen que GeoGebra tampoco da una respuesta adecuada, en este caso.

En la actividad final, luego de analizar las soluciones propuestas por distintos CAS y contrastarla con las obtenidas a mano con apoyo de resultados teóricos, los alumnos pudieron reflexionar y valorar la importancia de este tipo de actividades comparativas y de análisis para adquirir conocimientos y experiencias sobre el cálculo de primitivas y el empleo de CAS.

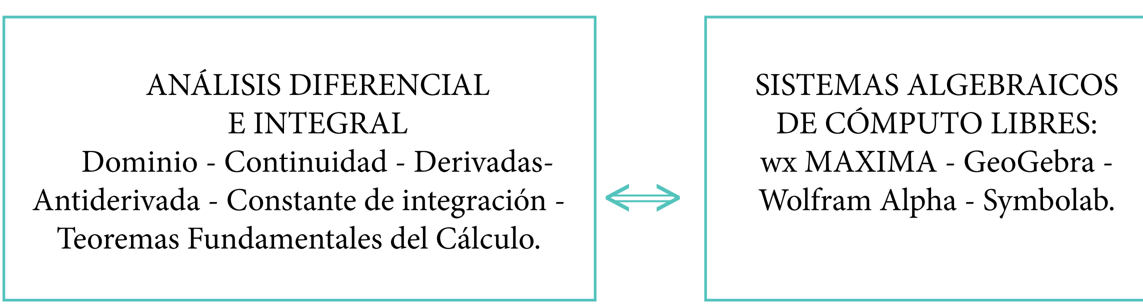


Figura 4: Contenidos y herramientas CAS utilizadas en el desarrollo de las actividades.

CONCLUSIONES

Se presenta una guía de actividades, con apoyo de diferentes herramientas CAS libres, en cuya resolución se realizan cálculos, representaciones gráficas, comparan y analizan resultados cuando las salidas del ordenador difieren de los cálculos obtenidos de manera manual empleando la teoría matemática. Se puede observar que este tipo de materiales didácticos, que se desarrollan en el aula, ofrecen a los alumnos la posibilidad de:

- Convertirse en lectores críticos y reflexivos de los resultados obtenidos, pudiendo chequear las fuentes de la cual provienen las informaciones, validando o no la calidad de esos resultados.
- Brindar experiencias para el desarrollo de la capacidad sobre el conocimiento de la existencia y propiedades de diversas herramientas y ayudas tecnológicas para la actividad matemática, su alcance y sus limitaciones; y
- Profundizar el aprendizaje de contenidos, tales como: cálculo de integrales indefinidas, constante de integración, dominio y continuidad de funciones, y el Teorema Fundamental del Cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación* Matemática SEIEM. 97-110. Recuperado de: https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/2728868.pdf

Hernaiz, I. (2010). *Las nuevas tecnologías y la calidad educativa. El desafío de la equidad Metas Educativas 2021-Propuestas Iberoamericanas y Análisis Naciona*l, 1a ed., 123-129. Buenos Aires: Santillana. Recuperado de: http://www.fundacionsantillana.com/upload/ficheros/noticias/201007/libro_v_foro.pdf el 11 de mayo de 2017.

Larson, R. E. y Hostetle, R. P. (1989). *Cálculo y Geometría Analítica* (Tercera edición). España. Madrid: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1994). El Cálculo (7 ed). México: Oxford University Press.

Ponce Campuzano, J.C. y Rivera Figueroa, A. (julio de 2011) Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas. *Números,* 77, 85-98. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros .

Zangara, A. (2009). Uso de las tecnologías en la educación: una oportunidad para fortalecer la práctica docente. *Puertas Abiertas*, n° 5, 2009. Recuperado de: http://www.puertasabiertas.fahce.unlp.edu.ar/numeros/n5/zangara el 12 de junio de 2017.

TRATAMIENTO METODOLÓGICO A PROBLEMAS DE LÓGICO-MATEMÁTICO

Juan C. Piceno
Universidad Autónoma de Guerrero, México.
jcpicenorivera@uagrovirtual.mx

FECHA DE RECEPCIÓN: 13/07/16, FECHA DE ACEPTACIÓN: 30/10/17

RESUMEN

En este artículo se realiza un tratamiento metodológico al planteamiento y resolución de problemas de carácter lógico - matemático, como vía para motivar hacia el estudio de la Matemática. En particular, se ponen de manifiesto las relaciones que se establecen entre el juego, las matemáticas y sus potencialidades educativas.

ABSTRACT

In this paper a methodological treatment is made to the approach and resolution of mathematical logic problems, as a way to motivate the study of Mathematics. In particular, there are revealed the relationships between games, mathematics and their educational potential.

PALABRAS CLAVE:

motivación - juegos - metodología y resolución de problemas

KEYWORDS:

motivation - games - methodology and problem solving

INTRODUCCIÓN

Los juegos y las matemáticas tienen muchos rasgos en común en lo que se refiere a su finalidad educativa. Las matemáticas dotan a los individuos de un conjunto de instrumentos que potencian y enriquecen sus estructuras mentales, y los posibilitan para explorar y actuar en la realidad. Los juegos enseñan a los escolares a dar los primeros pasos en el desarrollo de habilidades intelectuales, potencian el pensamiento lógico, desarrollan hábitos de razonamiento, enseñan a pensar con espíritu crítico; los juegos, por la actividad mental que generan, son un buen punto de partida para la enseñanza de la matemática, y crean la base para una posterior formalización del pensamiento matemático.

La Matemática es un instrumento esencial para el conocimiento científico. Por su carácter, esencialmente, abstracto-formal, su aprendizaje resulta difícil para una parte importante de los estudiantes. De todos es conocido que la Matemática es una de las áreas que más incide en el fracaso escolar en todos los niveles de enseñanza; es el área que arroja la mayor cantidad de resultados negativos en las evaluaciones escolares. “Debido a ello es que los matemáticos, los sicólogos y últimamente los especialistas en el estudio del aprendizaje” se han preocupado porque cada vez más gente aprenda matemáticas, primero para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático, y al mismo tiempo, para formar una base crítica pensante que permita el aumento de científicos y por ende, impulsar el desarrollo de la ciencia para una mejor convivencia de la humanidad.

Esta preocupación ha llevado a una parte de la comunidad científica a indagar en la historia de la matemática y en el quehacer propio de los matemáticos y se ha corroborado que los matemáticos han aprendido y han desarrollado gran parte de la matemática de nuestros tiempos a través de los juegos (De Guzmán, 1984), así es que desde mediados del siglo pasado ha proliferado la producción de bibliografía para motivar y permear el aprendizaje de la matemática dedicada a los juegos de estrategia y a la matemática recreativa.

> "El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza? (Miguel de Guzmán). Además, de facilitar el aprendizaje de la matemática, el juego, debido a su carácter motivador, es uno de los recursos didácticos más interesantes que puede romper la aversión que los alumnos tienen hacia la matemática. He aquí un texto de Martín Gardner que con mucho acierto expresa esta misma idea: "siempre he creído que el mejor camino para hacer las matemáticas interesantes a los alumnos y profanos es acercarse a ellos en son de juego (…). El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco mágico, una chanza, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades"
> (Ferrero, 1991, p. 13-14).

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que se desarrolla esta propuesta está inscrito en la Resolución de Problemas como metodología de aprendizaje adecuada al Constructivismo Histórico-Cultural de Lev Vigotsky, entre otras vertientes que se trabajan están las: Directrices heurísticas basadas en los juegos (De Guzmán, 1984) retomando así las cuatro etapas en la resolución de problemas que destaca George Polya en su tratado How To Solve It? (Polya, 1965), al mismo tiempo asumimos y destacamos las razones que enumeran los autores Luis Campistrous y Celia Rizo para el tratamiento de los problemas en la enseñanza de la matemática a través de problemas (Campistrous y Rizo, 2013).

JUEGOS DE ESTRATEGIA

Trabajaremos con juegos cuyo objetivo sea obtener un triunfo, ya sea sobre un jugador rival o para lograr una meta en un juego solitario. Los juegos propuestos están relacionados con estrategias sustentadas en la heurística del proceso de resolución de problemas, asumiendo las ideas planteadas por De Guzmán (1984), cuando hace un símil entre los juegos de estrategia y la resolución de problemas y enmarca el objetivo del juego en las cuatro etapas en las que George Polya sitúa el proceso de solución de un problema, situación que el autor asume y amplía en el desarrollo de su tesis doctoral "Resolución de Problemas en el Desarrollo del Pensamiento Matemático" (Piceno, 1998). Una vez que describimos el juego, sus reglas y la meta, dejaremos que el estudiante se familiarice con la situación, con la finalidad de que entienda el juego, planee la estrategia, la ejecute, logre la meta y compruebe que la estrategia es la adecuada, generalmente sometiéndola a una demostración rigurosa, generalmente el explotar el juego requiere de plantear alguna situación problema que tenga que ver con la adquisición de un concepto matemático y con el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático, asunto que dejaremos para un siguiente artículo.

En este artículo trataremos juegos de lógica y nos preocuparemos en crear problemas para abordar temas dentro del propio terreno de la Lógica, con el objetivo de fundar las bases del razonamiento deductivo, para ir de las premisas a la conclusión y lograr el objetivo del juego, desde luego las competencias matemáticas a desarrollar son las de la argumentación y la demostración. También nos ocuparemos de desarrollar habilidades y estrategias en torno a la resolución de problemas matemáticos. El artículo estará dividido en cuatro secciones, la primera tratará del juego, la segunda del planteamiento de problemas que se deriven del juego, la tercera de la solución de los problemas, a manera de orientación para el profesor (guía), para que a su vez realice actividades didácticas (preguntas y/o actividades orientadoras) que guíen al estudiante en el proceso de resolución del problema y la cuarta en la que se tratará de la generalización de las ideas conceptos y estrategias.

PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas tiene dos matices de primordial importancia, el primero es plantear y resolver problemas actividad que Polya (1965) trata adecuadamente en su libro con ese nombre, en el que destaca las cuatro etapas en las que el resolutor de un problema se ve inmerso, generalmente inconscientemente. Aunque las cuatro etapas son igualmente importantes, dedica una gran cantidad de páginas a describir y ejemplificar las estrategias heurísticas, que a su juicio y por su experiencia como resolutor de problemas, considera relevantes. La otra vertiente de la resolución de problemas es la educativa, algunos le llaman "enseñanza problémica", otros "aprendizaje a través de problemas", otros simplemente "resolución de problemas". Todas coinciden en plantear una situación problema como eje motivador, que esté situado en la zona de desarrollo próximo del aprendiz y que los conceptos matemáticos a alcanzar y las competencias a desarrollar estén en la zona de desarrollo potencial, definidas por Lev Vigotsky en su teoría del "Constructivismo histórico-cultural".

Somos del criterio que ambas vertientes tienen el mismo peso e importancia dentro del proceso de resolución de problemas, la primera como una competencia matemática a desarrollar por parte del aprendiz y la segunda, en el diseño de una actividad didáctica planteando una situación problema que emerge de un juego o bien planteando un problema que surge de las preguntas: ¿Es sólida tu estrategia para ganar o para conseguir la meta?, ¿tu estrategia funciona en cualquier situación del juego?, ¿podrás demostrar que tu estrategia es eficiente? No nos detendremos a reflexionar acerca de cuándo una situación descrita es o no un problema, sólo aceptemos que eso siempre depende del individuo, en el sentido que asimile la situación como un reto a resolver, sin ese compromiso nada es un problema y por tanto la actividad didáctica pierde todo valor.

En referencia al orientador o guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje, haremos énfasis en sus características asociadas con la metodología de la enseñanza problémica, desde luego recordando nuevamente a Polya, diremos que "un buen profesor de matemáticas, en cualquier nivel, debe conocer perfectamente los conceptos matemáticos que pretende comunicar y algo más", así, las características básicas son:

- Debe ser determinante para contribuir a un ambiente de trabajo que fomente la confianza, la participación, el diálogo, la cooperación y el respeto mutuo.
- Se interesa más por el camino que siguen los aprendices para llegar al resultado, que el resultado mismo.
- Es guía en el proceso de solución.
- Invita a los alumnos a comunicar y a cuestionar ideas.
- Hace preguntas que permitan a los alumnos renunciar a una vía de solución, cuando ésta misma ya ha sido explorada por él.
- Alienta las vías de solución plausibles.

- Orienta hacia una vía de solución cuando es pertinente.
- No frena vías de solución que no sabe que son equivocadas, más bien las analiza y prepara las preguntas orientadoras para explotarlas.
- Construye el puente entre los nuevos conocimientos obtenidos por los alumnos y la socialización de los mismos.
- En resumen, el docente debe ser una persona con un alto nivel científico con respecto al nivel en que se desempeña, debe contar con una preparación pedagógica integral y una actitud inclinada hacia la investigación que permitan el buen desarrollo de la actividad.

SISTEMA DE ACTIVIDADES PROPUESTO

En este artículo como expusimos en la introducción nos ocupamos de juegos de lógica, el aprendizaje de la lógica matemática y el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático.

MAPAS

Este juego consiste en iluminar con 4 colores las regiones en las que ha sido dividido un plano, sin que dos regiones vecinas (que compartan más de un número finito de puntos como frontera) queden iluminadas del mismo color.

Conceptos Matemáticos:

- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas:
- Disyunción, conjunción, implicación y equivalencias.
- Inferencias.
- Habilidades del Pensamiento Matemático a Desarrollar:
- Argumentación
- Resolución de Problemas:
- División de Casos
- Reducción al Absurdo
- Secuencia.

El maestro (guía) propone un plano subdividido en regiones para ser iluminado por todo el grupo, por ejemplo el siguiente:

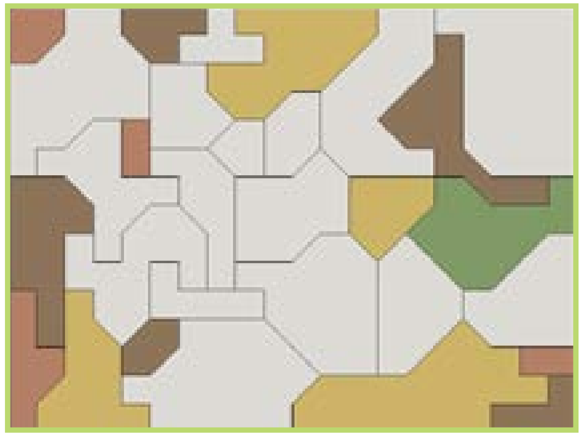


Figura 1.

Como podemos observar, hay regiones que pueden ser iluminadas inmediatamente, sin problema alguno, ya que lo único que debemos preservar es que el color del que decidimos iluminar dicha región no haya sido usado para iluminar una región vecina. Luego, si tenemos que tres regiones ya pintadas de tres colores distintos rodean a una cuarta región aún no iluminada, entonces esta última deberá ser pintada con el cuarto color disponible, quedando el mapa iluminado en una primera fase como sigue:

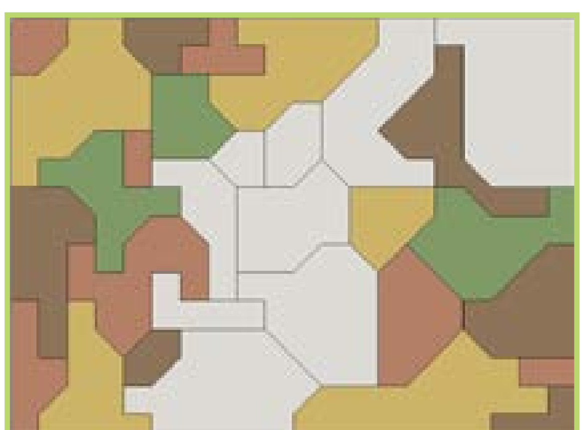


Figura 2.

Ahora nos encontramos con un obstáculo, cada una de las regiones que faltan por iluminarse tienen al menos dos posibilidades para ser pintadas.

Problema: ¿Cuál debe ser la siguiente región que se debe iluminar? ¿Por qué?

Solución: Las dos regiones de arriba que no han sido iluminadas tienen las siguientes alternativas: Si la de la esquina la pintamos de rojo "división de casos", entonces la vecina deberá ser verde. De aquí se sigue que las regiones con forma de hexágono y pentágono vecinas cada una de ellas de una región amarilla y una región verde, deberán ser pintadas de rojo y café, no importa en qué orden, así que para pintar la región debajo de ellas no habrá color disponible, ¡está rodeada de regiones vecinas pintadas con cada uno de los cuatro colores! Lo cual va contra las reglas del juego "reducción al absurdo" y esto surgió de que supusimos la región de la esquina sería pintada de rojo, entonces esa región deberá ser pintada de amarillo, ¡la otra opción!, y la vecina de rojo. Quedando hasta este momento iluminado como sigue:

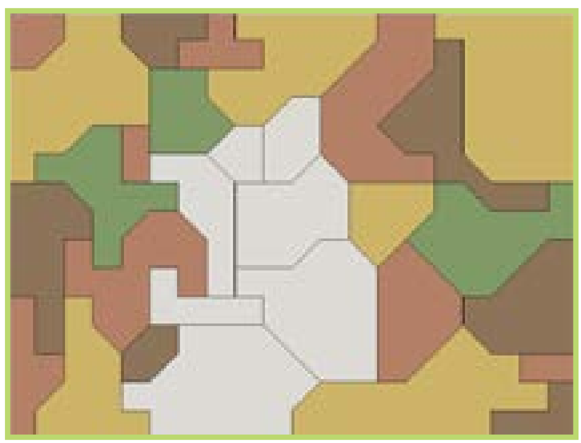


Figura 3.

El siguiente obstáculo que nos encontramos es nuevamente que las regiones restantes tienen al menos dos opciones de ser iluminadas.

Problema: ¿Cuál debe ser la siguiente región a iluminar? ¿Por qué?

Solución: Observemos las regiones debajo del hexágono indistintamente deberán ser iluminadas de café y verde, no importa cuál de cada color, entonces la vecina de ambas a la izquierda quedará rodeada de regiones vecinas con los colores, rojo, verde y café, entonces deberá ser pintada de amarillo y terminamos como sigue:

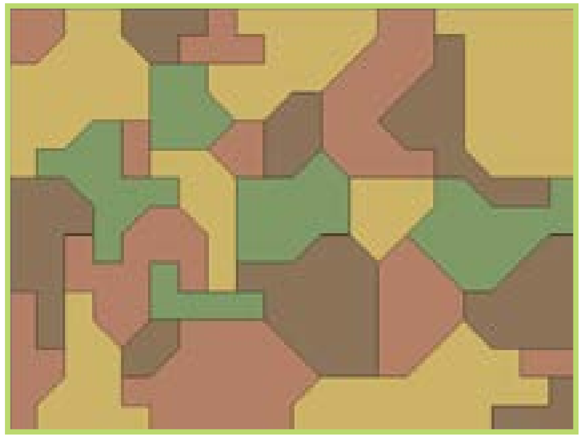


Figura 4.

SOCIALIZACIÓN DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

Revisemos cómo resolvimos el primer obstáculo.

Premisa: La región de la esquina deberá ser roja o amarilla, es decir, una proposición de la forma “P o Q” que es verdadera. De aquí tenemos, los siguientes casos “división de casos” de inferencias: P o Q y –P, implica Q y P o Q y –Q, implica P. No pueden ser falsas las dos.

La siguiente premisa, si la esquina es pintada de rojo, entonces con cualquier color que iluminemos la región que queda debajo de las regiones con forma de pentágono y hexágono va en contra de las reglas del juego, es decir, P implica una falacia F “proposición siempre falsa” pues se opone a las reglas del juego. Siendo P implica F verdadero, entonces P será falso, aquí usamos la siguiente regla de inferencia “P implica F y –F, conclusión –P”. Y por el primer caso de inferencia descrito anteriormente, se tiene que Q (La esquina es pintada de amarillo) es verdadera.

Revisemos cómo resolvimos el segundo obstáculo.

Premisa P: Las regiones debajo del hexágono indistintamente deberán ser iluminadas de café y verde, no importa cuál de cada color “sin perder generalidad”.
Premisa Q: La región vecina de ambas “A” (a la izquierda) quedará rodeada de regiones vecinas con los colores, rojo, verde y café.
Premisa S: Si una región está rodeada de tres regiones con cada uno de tres colores dis-

tintos, entonces esa región deberá de iluminarse del color restante

Conclusión T. La región "A", deberá ser pintada de amarillo

Aquí usamos la siguiente regla de inferencia:

Q y Q implica T

Conclusión T.

LAS CINCO PIEZAS

Este también es un juego de lógica (para dos jugadores, uno de ellos puede ser el ordenador). En este juego se trata de dar con un arreglo de las cinco piezas grandes del ajedrez en un tablero de 8 por 8, con las siguientes reglas:

El primer jugador piensa un arreglo de las cinco piezas en el tablero y señala las cinco casillas que está utilizando para el arreglo.

El segundo jugador puede preguntar acerca de cuántas piezas atacan alguna de las casillas, una a la vez, información que debe proporcionar el primer jugador.

Gana el segundo jugador, en caso de que la cantidad de preguntas sea menor que 5, en caso contrario gana el primer jugador.

Conceptos Matemáticos:

- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas:
- Disyunción, conjunción, implicación y equivalencias.
- Inferencias.
- Habilidades del Pensamiento Matemático a Desarrollar:
- Argumentación
- Resolución de Problemas:
- División de Casos
- Reducción al Absurdo

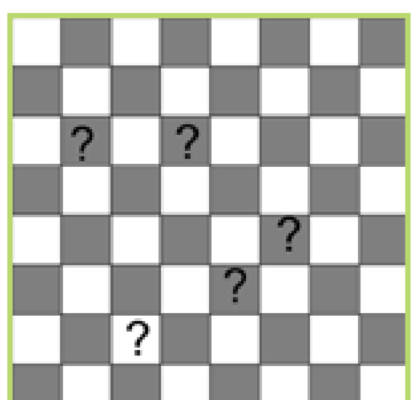


Figura 5.

Secuencia. Para que los estudiantes se familiaricen con el juego, el profesor (guía), propone al grupo un arreglo para que los alumnos, en grupo den con el arreglo, por ejemplo puede proponer la configuración anterior.

Problema: ¿Por qué casilla debemos preguntar, acerca del número de ataques? ¿Por qué?
Solución: Los alumnos discuten, acerca de por qué casilla preguntar el número de ataques, el guía propicia que elijan la casilla más adecuada, se dan argumentos como el que sigue:

La casilla d4 es la única con posibilidades de ser atacada por las cinco piezas, así que sea cual sea la respuesta de 0 a 5 se pueden descartar las posiciones que correspondan a cada pieza, por ejemplo si es 0, la reina tendría que estar en c2, la torre en e3 o en b6, el alfil en d6 o en f4,… Deciden que deben preguntar por d4. La respuesta es que P: La casilla d4 es atacada por dos piezas.

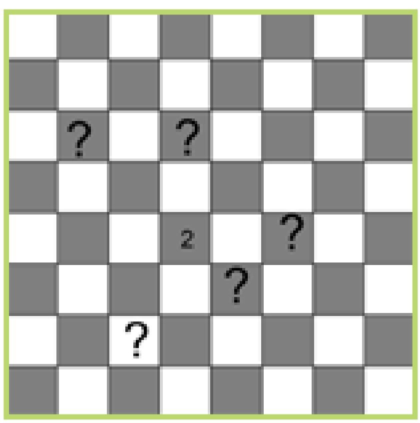


Figura 6.

Problema: Dado que d4 es atacada por 2 piezas, cuál debe ser la casilla por la que debemos preguntar acerca del número de ataques?

Solución: Con esta información los alumnos debaten nuevamente, teniendo como objetivo dar con la casilla más conveniente para averiguar el número de ataques, el guía sigue orientando la discusión, aquí se presentan argumentos como el que sigue:

La casilla f5 al igual que la casilla c4 son las únicas que pueden ser atacadas por 3 piezas, así que cualquier número entre cero y tres nos proporciona información, por ejemplo si f5 es atacada por una pieza y en c2 va la reina, entonces en f4 va caballo o alfil y el caballo no va en e3 ni en d6, . Finalmente proponen preguntar por la casilla f5. Siendo la respuesta, Q: La casilla f5 es atacada por dos piezas.

Problema: ¿Es suficiente la información para dar con el arreglo? ¿Por qué?

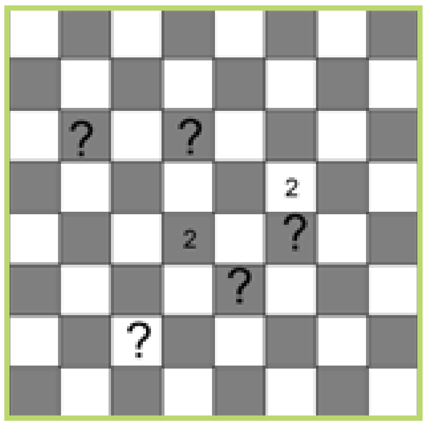


Figura 7.

Solución. Se dan argumentos como sigue:

Si en c2 va el alfil y en e3 va el caballo, entonces en f4 deberá ir cualesquiera de las piezas; reina, torre o rey y por tanto f5 sería atacada por tres piezas, lo que contradice la proposición Q.

Si en c2 va el alfil y en d6 va el caballo, entonces en f4 deberá ir cualesquiera de las piezas; reina, torre o rey y por tanto f5 sería atacada por tres piezas, lo que contradice la proposición Q.

Si en c2 va la reina y en e3 va el caballo, entonces en f4 deberá ir el alfil. Luego en b6 y d6 van torre y rey, entonces d4 no puede ser atacada por más de una pieza, contradiciendo la proposición P.

Si en c2 va reina y en d6 va caballo, entonces en f4 va alfil, en e3 y b6 la torre y el rey, contradiciendo nuevamente la proposición P.

De las cuatro proposiciones anteriores se deduce que: S- Si en c2 va reina o alfil, entonces el caballo va en b6.

Si en c2 va torre o rey, entonces el caballo va en e3 o en d6 y en f4 irá dama, torre o rey. Si el caballo va en d6 y dama en f4, entonces rey o torre va en b6 y alfil en e3 o la otra opción. Si el caballo va en d6 y rey en f4, entonces alfil y dama van en e3 y b6.

…

Por lo tanto falta información.

Problema: ¿Por qué casilla se debe preguntar para encontrar el arreglo? ¿Por qué?

Solución. Se propone preguntar por c4 pues en la solución del problema anterior se observa que es la que despeja las dudas acerca de qué pieza va en la posición f4, obteniendo la respuesta R: La casilla c4 es atacada por una pieza.

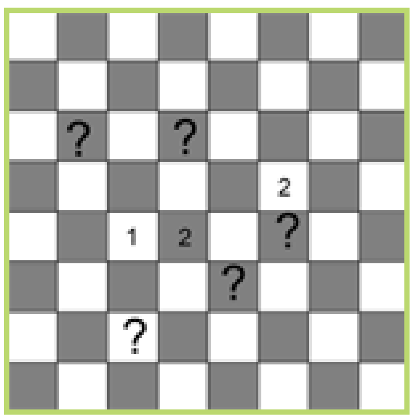


Figura 8.

Con esta información se tiene lo siguiente:

En c2 no va torre ni dama, ya que cualquiera que vaya allí implica un ataque a c4 y por S: Si en c2 va torre o rey, entonces el caballo va en e3 o en d6 y por T: Si en c2 va dama, entonces caballo va en b6, de cualquier forma se contradice la proposición R.

En f4 no va torre ni dama. Si torre, entonces el caballo va en c2, lo que contradice P, d4 tendría al menos los ataques de la torre, el caballo y la dama. Si dama, entonces alfil va en c2 por Q. Ya que caballo en e3 o en d6, contradice R. Luego, dama en f4, alfil en c2 y no hay forma de colocar al caballo.

CONCLUSIÓN:

En f4 va rey, uno de los ataques a f5 se debe a la pieza colocada en f4 y no es torre ni dama.

En c2 va el alfil, no puede ir torre, ni caballo ni dama y el rey ya está colocado.
En b6 va caballo, por S.
En d6 va torre y en e3 va la dama.

Problema: Una persona dejó el juego como sigue, podrás ayudarle a encontrar el arreglo o bien determinar la casilla de la cual necesitamos información?

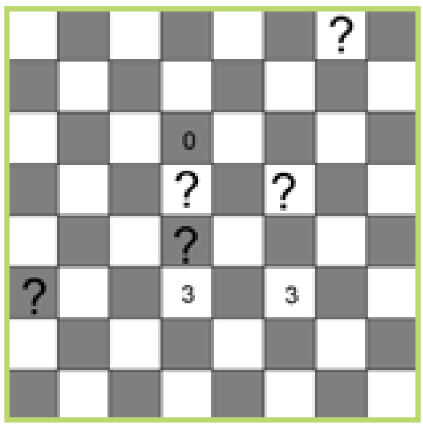


Figura 9.

Solución. Sean P la proposición "La casilla d6 no es atacada por alguna pieza", Q la proposición "La casilla d3 es atacada por 3 piezas" y R la proposición "La casilla f3 es atacada por 3 piezas".

P implica S: En f5 no va el caballo, en la columna d no va torre ni dama y en a3 no va alfil ni dama.

Q y S implica T: La torre va en a3, el rey en d4 y la dama o el alfil en f5.

R y T implica W: La dama va en f5, el alfil va en d5 y el caballo en g8.

Incidencias:

Mapas: Este juego por si sólo es un problema interesante de lógica, en el cuál a menudo recurrimos a la reducción al absurdo y al análisis de casos para su solución, todas las disposiciones de los regiones de los mapas son solubles para cuatro colores, se usa el hecho de la respuesta a lo que muchos matemáticos se preguntaban -si cualquier mapa era o no posible iluminarlo con 4 colores-, habiéndose encontrado situaciones especiales de mapas que es posible iluminarlos con sólo dos colores. Y habiendo resuelto la pregunta para coloraciones usando 5 colores. La respuesta a los 4 colores ya se obtuvo a base de usar un método exhaustivo a través del ordenador. También representa un reto resolver la siguiente situación: Si un mapa ha sido iluminado usando 4 colores, ¿ es posible iluminarlo con otra distribución de los colores, sin que ésta sea una de las 24 permutaciones entre ellos?

Las cinco piezas: Como se puede observar, este problema aparte de ser un bonito y motivador problema de lógica, también es un buen pretexto para incursionar en la teoría del análisis combinatorio y de la probabilidad a partir de preguntarse: ¿Cuál es la probabilidad de dar con el arreglo después de una pregunta? ¿Cuál es la probabilidad de dar con el arreglo después de dos preguntas? Ya que en la solución de ellos surgen conceptos como: permutaciones con puntos fijos, probabilidad condicional, etc.

CONCLUSIONES

La propuesta desarrollada en el artículo se encuentra en fase de generación de resultados similares, razón por la cual las sugerencias e indicaciones planteadas son de carácter explicativo-argumentativo. Es de resaltar que la propuesta pone de manifiesto, desde el punto de vista teórico, los alcances del tratamiento de problemas lógico-matemáticos en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática Escolar (resulta atinado plantear que la propuesta está corroborada desde el punto de vista experimental (Bello García, Rojas y Sigarreta, 2016)).

En la misma dirección, podemos aseverar que, en un primer nivel de aproximación metodológica, las indicaciones y sugerencias por nosotros desarrolladas en este trabajo, sobre el tratamiento metodológico de los problemas lógicos están en relación directa con las ideas planteadas por Locia, Navarrete y Sigarreta (2010). Así mismo las ideas aquí expresadas y explicitadas a través de los ejemplos tratados, han sido llevadas a cabo en talleres de Lógica, Aritmética, Álgebra y Probabilidad, para la preparación de estudiantes de concursos y olimpiadas de matemáticas, obteniendo valiosos resultados en el desarrollo de sus competencias sobre todo las referentes a; la comunicación, la argumentación, el razonamiento y la demostración. En estos momentos, estamos enfrascados en la aplicación de la propuesta dentro de cursos y talleres de educación continua de docentes de la escuela media mexicana en general.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bello, W.; García, M.; Rojas, O. y Sigarreta, J. (2016). Incidencia de los problemas lógicos matemáticos en la motivación hacia la Matemática. *Premisa 18* (70), 17-35.

Campistrous, L. y Rizo, C. (2013). La resolución de problemas en la escuela. En Y.M y A.R. (Eds.), *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. Santo Domingo:* Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe.

De Guzmán, M. (1984). Juegos Matemáticos en la Enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton (Ed.), *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 4985). Santa Cruz de Tenerife: Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton.

Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática.* Madrid: La Muralla

Locia, E.; Navarrete, S. y Sigarreta, J. (2010). *Metodología para la Resolución de Problemas Matemáticos.* Premisa 13 (48), 28-41.

Piceno, J. (1998). *Resolución de Problemas en el Desarrollo del Pensamiento Matemático.* Tesis Doctoral no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México: Trillas.

IMPLANTACIÓN DEL SOFTWARE GRAPH PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE LAS INECUACIONES LINEALES EN LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA

Leonardo Santiago Vinces Llaguno[1],
Daniel Octavio Santillán Vozmediano[2], Moisés Arturo Menace Almea[1],
Erika Annabel Zamora Cevallos[3], Byron Wladimir Oviedo Bayas[1]

1 Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Los Ríos,
2. Unidad Educativa Distrito Metropolitano Santo Domingo,
3. Organismo Colegiado Académico Superior de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Los Ríos , Ecuador

lvinces@uteq.edu.ec, dannysantillan.12@gmail.com,
mmenace@uteq.edu.ec, erika.zamora2013@uteq.edu.ec, boviedo@uteq.edu.ec

FECHA DE RECEPCIÓN: 6/02/17, FECHA DE ACEPTACIÓN: 6/11/17

RESUMEN

La presente investigación tiene por objetivo potenciar el aprendizaje de las inecuaciones lineales en los estudiantes de la asignatura de Matemática. Se tomó como piloto a la Unidad Educativa Distrito Metropolitano de la ciudad de Santo Domingo, la potenciación se realizó mediante la incorporación en clases de un software que permite graficar de una forma más efectiva las inecuaciones, y de esta manera comprender la forma analítica de resolver las mismas y lograr conexión entre las dos partes, logrando así mejorar el rendimiento en los estudiantes. La investigación responde a un diseño Cuasi experimental, con pre-prueba, intervención y post-prueba, a un solo grupo, además se enfoca como aplicada, cuantitativa y de campo, logrando así determinar los problemas de aprendizaje que tienen los estudiantes en la asignatura.

ABSTRACT

The objective of this research is to promote the learning of linear inequations in students of Mathematics. The Metropolitan District Educational Unit of the city of Santo Domingo wastaken as a pilot; the empowerment was achieved through the incorporation into classes of software that allows them to graph inequations in a more effective way, so that learners are able to understand the analytical way to solve them and find out connection between graphing and problem solving processes, thus improving student performance. The research responds to a Quasi-experimental design, with pre-test, intervention and post-test, to a single group. In addition, this research is meant as applied, quantitative and field, thus determining the learning problems that students have in the subject.

PALABRAS CLAVE:

educación – matemática - software, aprendizaje - inecuaciones lineales

KEYWORDS:

education, mathematics – software – learning - linear inequations

INTRODUCCIÓN

Actualmente las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) han evolucionado rápida y efectivamente, logrando introducir cambios en la comunicación, trabajo y en el proceso del aprendizaje (Calzadilla, 2002). El uso entonces de las TICS en la educación permite que el estudiante se convierta en el protagonista de su aprendizaje, para lo cual debe poseer un conjunto de habilidades y competencias que le permita adaptarse a los cambios constantes que demanda su formación académica (Alonso, 2014).

La asignatura de matemáticas con apoyo de las TICs (software gráfico), brinda la oportunidad necesaria para desarrollar en el estudiante habilidades como la inteligencia lógico-matemática; de ahí que el presente proyecto tiene por objetivo diseñar una guía para la aplicación de un software gráfico para el aprendizaje de las inecuaciones lineales en los estudiantes de 3ero de Bachillerato en la asignatura de Matemática de la Unidad Educativa Distrito Metropolitano.

La Matemática es una de las asignaturas que por su estructura, lógica, formalidad, la demostración del método, lenguaje cuantitativo preciso y herramienta de apoyo de todas las ciencias; facilita el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y espacial, y posibilita al conocedor a integrarse en equipos de trabajo interdisciplinarios para resolver problemas de la vida real, los mismos que, actualmente, no pueden ser enfrentados a través de una sola ciencia (Cantoral, 2014). Además, la sociedad tecnológica e informática en que vivimos requiere de individuos capaces de adaptarse a los cambios que ésta fomenta; así, las destrezas matemáticas son capacidades fundamentales sobre las cuales se cimientan otras destrezas requeridas en el mundo laboral.

Las Pruebas Censales del Sistema de Evaluación y Rendición de la Educación del Ecuador 2008 (SOTO, 2015) realizadas por el Ministerio de Educación a 800 mil estudiantes de escuelas públicas y privadas, en sus resultados obtuvo las consideraciones que a continuación se presentan en los promedio generales obtenidos por provincia en las asignaturas evaluadas.

Gráfico 1: Promedio por provincia pruebas SER (2008).

Como podemos apreciar en el Gráfico Nº 1, las provincias con mejor puntuación fueron Pichincha, Tungurahua, Carchi y Azuay, mientras que entre las provincias de mediano y bajo nivel se encontró la de Santo Domingo de los Tsáchilas entre otras.

Los datos obtenidos fueron el resultado de evaluaciones tomadas a alumnos de cuarto, séptimo y décimo año de educación básica; así como también a tercero de bachillerato (Santillán, 2015).

En lo que compete a la asignatura de Matemática, como se puede observar en el Gráfico Nº 2, el resultado menor fue notorio a nivel nacional, lo que ha preocupado a las autoridades. Los resultados obtenidos indican que a nivel Ecuador las pruebas aplicadas a tercero de bachillerato tenían calificaciones con 49% de calificaciones insuficientes y un 32,18% de calificaciones regulares, sumando un alarmante 81,18% bajo rendimiento (Santillán, 2015).

Gráfico 2: Nivel de rendimiento por área de estudio.
Fuente: Resultados pruebas SEF. Ecuador (2005) Ministerio de Educación Ecuador.

DESARROLLO

Las dificultades que tienen los estudiantes para el aprendizaje de la matemática le han dado el calificativo de difícil. En el Libro de La Didáctica y la dificultad en la matemática (D'Amore, 2010), "Una materia es definida difícil sobre la base de la generalidad estadística de los resultados obtenidos, pero no existen caracterizaciones objetivas de esto".

Este estudio apunta las dificultades del aprendizaje de las matemáticas resumidas a fin de justificar el trabajo propuesto, así: El aprendizaje de matemática incluye el aprendizaje de conceptos, algoritmos, estrategias para la resolución de problemas; comunicación o gramática de la interacción humana (D'Amore, 2010).

Entre las dificultades y errores se encuentran los de ignorancia, distracción, olvido, falta de atención, los que se asocian a déficit sensoriales; estas causas mediatas se relacionan con otras como el estrés, un problema familiar, una enfermedad, etc; de esto se desprende el error del maestro para no detectar la causa mediata sino también la remota y profunda (D'Amore, 2010).

En ocasiones la falta de convicción del maestro determina una orientación casual y contradictoria o a los conceptos enseñados por los maestros como correctos no se les añade los micro-conceptos que el estudiante obtiene en el proceso enseñanza aprendizaje. El trabajo realizado en la Institución en los últimos 4 años, además de los realizados en otras instituciones por 4 años más, basados en el promedio obtenido (5,98) en la materia de Matemática año a año, en general muestran claramente que es necesaria la aplicación de otros recursos como las TICs para lograr reducir la deficiencia que presentan los estudiantes en su desempeño de la materia, con dificultades permanentes en el análisis y síntesis del tema, ocasionando dificultades en la determinación de resultados y su interpretación al enseñar de forma tradicional (Santillán, 2015).

METODOLOGÍA

"La Metodología describe y analiza los métodos que sirven para formar un criterio científico utilizado en la conducción de cualquier investigación" (De La Mora, 2006, p.214). Esta metodología permite reunir los datos a ser usados como base para la interpretación y explicación de esta investigación.

La población de estudio está compuesta por los estudiantes de Tercer Año Bachillerato de la Unidad Educativa Distrito Metropolitano. En virtud que el universo es pequeño (31 estudiantes) la muestra será todo el curso. La variable independiente con la que se trabajará será el software Graph 4.4.2, mientras que la dependiente las ecuaciones lineales (Santillán, 2015).

INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Los datos recolectados en la investigación tendrán características de tipo cuantitativo, los cuales serán obtenidos directamente de la realidad. Se aplicó una encuesta estructurada ya que contiene una lista formal de preguntas que se les formulan a todos por igual, y su principal ventaja es que, dependiendo de su profundidad, se obtendrá datos muy precisos; sin embargo el riesgo radica en la posibilidad de que los estudiantes indiquen respuestas falseadas. Estas fueron aplicada a los estudiantes de tercer año bachillerato para conocer su opinión en cuanto al uso de software en las clases de Matemáticas y también conocer la frecuencia con que utilizan las TIC´S en el aprendizaje de esta asignatura. Adicionalmente se aplicó el test escrito, el mismo que sirve para determinar el rendimiento inicial (antes) y el cambio de actitud de los estudiantes hacia la matemática (después) por efecto de la aplicación del Software Graph 4.4.2. (Santillán, 2015). Los datos que provengan de los distintos instrumentos aplicados serán sometidos a dos tipos de análisis estadísticos: Descriptivo que es el "conjunto de métodos para organizar, resumir y presentar los datos de manera informativa" (Lind, 2004) e Inferencial que es el "conjunto de métodos utilizados para saber algo acerca de una población, basándose en una muestra" (Lind, 2004).

RESULTADOS

En general los resultados que se obtuvieron del Pretest se pueden visualizar en la tabla 1 y el gráfico 3.

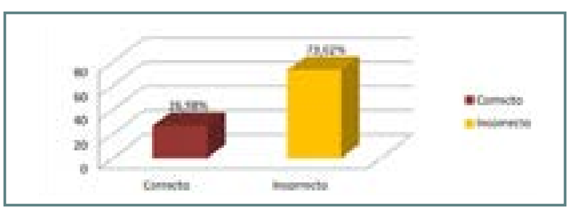


Gráfico 3: Resultados Generales del Pretest
Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del tercer año del bachillerato. Contabilidad de la UEDM.

TABLA 1. Resultados generales del pretest

INDICADORES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Correcto	92	26,98%
Incorrecto	249	73,02%
TOTAL	341	100,00%

Las 11 preguntas del Pretest se agrupan en las siguientes dimensiones: comprensión gráfica y comprensión analítica, de acuerdo a la tabla 2 a continuación:

TABLA 2. Dimensión a diagnosticar

	DIMENSIÓN	PREGUNTA
1.	Comprensión gráfica	7, 11
2.	Comprensión analítica	1,2,3,4,5,6,8,10
TOTAL		

Las preguntas del Pretest que sustentaron esta información recogida en la siguiente tabla y su respectivo gráfico sintetizan la información de toda la muestra en las dos preguntas dirigidas a diagnosticar el nivel de comprensión gráfica en los estudiantes.

TABLA 3. Resultados comprensión gráfica del pretest

INDICADORES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Correcto	20	32,26%
Incorrecto	42	67,74%
TOTAL	62	100,00%

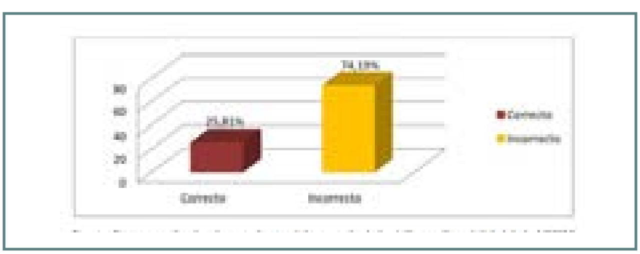


Gráfico 4: Resultados Comprensión Gráfica Protest
Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del tercer año del bachillerato. Contabilidad de la UEDM.

Las preguntas del Pretest que sustentaron esta información recogida en la siguiente tabla y su respectivo gráfico sintetizan la información de toda la muestra en las dos preguntas dirigidas a diagnosticar el nivel de comprensión gráfica en los estudiantes.

TABLA 3. Resultados comprensión analítica del pretest

INDICADORES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Correcto	72	25,81%
Incorrecto	207	74,19%
TOTAL	279	100,00%

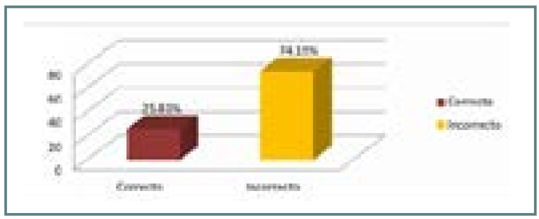


Gráfico 5: Resultados Comprensión Analítica Pretest
Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del tercer año del bachillerato. Contabilidad de la UEDM.

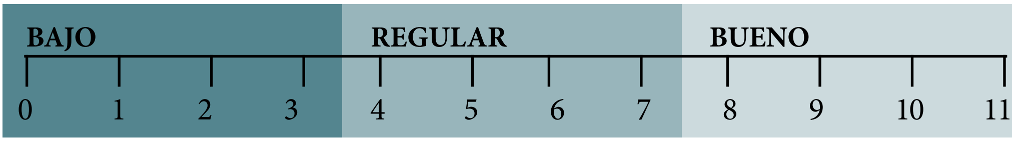
Los datos obtenidos en el Pretest, individuo por individuo se organizan de acuerdo a la tabla 5, y permite apreciar las diferencia entre las notas alcanzadas por estudiantes (Santillán, 2015).

Tabla 5: Notas Pretest

ID	Pretest	ID	Pretest	ID	Pretest
1	2	11	5	21	2
2	4	12	2	22	3
3	1	13	2	23	2
4	1	14	2	24	2
5	2	15	2	25	2
6	2	16	3	26	3
7	2	17	5	27	2
8	1	18	3	28	3
9	4	19	5	29	3
10	3	20	5	30	4
				31	2

Fuente: Tabulación de datos

La escala para medir el rendimiento de los estudiantes en el Pretest se muestra en la imagen a continuación:



Gráfica 6: escala de rendimiento del Test

Como se indicó antes el Pretest presentó 11 preguntas por lo cual mientras más puntaje se obtenía existe un mejor rendimiento, si el puntaje es bajo existe un mal rendimiento. La nota máxima debería ser 11 puntos y la mínima es 0 puntos.

De acuerdo a la tabla 6 se realiza la siguiente interpretación descriptiva y también se presenta el gráfico 7.

Tabla 6: Estadística descriptiva Prestest

Media	2,7097
Error típico	0,2135
Mediana	2
Moda	2
Desviación estándar	1,1887
Varianza de la muestra	1,4129
Curtosis	-0,3140
Coeficiente de asimetría	0,7357
Rango	4
Mínimo	1
Máximo	5
Suma	84
Cuenta	31

Fuente: Análisis estadístico descriptivo

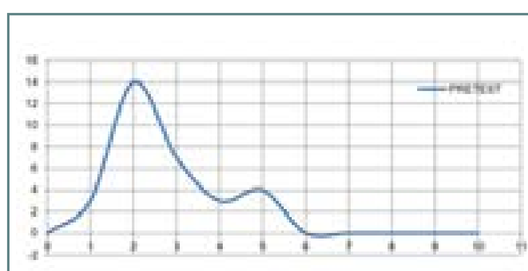


Gráfico 7: Curva Prestest
Fuente: Análisis estadístico descriptivo

En promedio los alumnos obtuvieron una nota de 2.71 lo cual de acuerdo a la escala de rendimiento indica que en general tienen un bajo rendimiento. La nota que más se repitió (moda) fue 2 lo que implica un bajo rendimiento. De acuerdo a la nota de la mediana que es 2, el 50% de los estudiantes evaluados se encuentra bajo de ella y más del 50% se encuentra bajo la media, denotando el bajo rendimiento. Además las notas se desvían de 2.71, en promedio 1.19 unidades. Ningún estudiante alcanzó la nota máxima de 11, la nota mayor fue 5 y la menor fue 1. En general las notas correspondientes al Pretest se sitúan en valores bajos indicando el bajo rendimiento de los estudiantes (Santillán, 2015).

DIFICULTADES DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICA:

Para dar cumplimiento a este objetivo, los instrumentos que se utilizó fueron dos encuestas, la primera referente a Matemática, y la segunda referente al Software Educativo. Estas sido tabuladas y se presentan a continuación en los siguientes apartados. Se los presenta de dos maneras, como resultados generales y también agrupados por dimensiones. En el segundo caso para la encuesta sobre la asignatura las dimensiones son: definición, utilidad, visión del aprendizaje, dificultades para aprender, para la encuesta de software educativo las dimensiones son: rol docente, mejora del entendimiento, alfabetización digital (Santillán, 2015).

Las 10 preguntas de la encuesta se agrupan en las siguientes dimensiones citadas anteriormente de acuerdo a la tabla 7 a continuación:

TABLA 7. Dimensión a diagnosticar

	DIMENSIÓN	PREGUNTA
1.	Definición	1, 4, 3
2.	Utilidad	2, 4, 5,
3.	Visión del aprendizaje	7,8,9
4.	Dificultades para aprender	1

Respecto a la definición, se refiere a qué el estudiante piensa qué es la matemática, en las tres preguntas se puede afirmar que efectivamente la mayoría de los estudiantes tienen claro qué es la matemática (Santillán, 2015).

Si damos una mirada a la utilidad o usos de la asignatura, en las cuatro preguntas en general se puede afirmar que los estudiantes saben cuál es la utilidad de la asignatura en la vida cotidiana (Santillán, 2015).

La visión del aprendizaje pretende averiguar cómo aprecia el estudiante que es aprender matemática, en las dos preguntas en general se puede afirmar que los estudiantes opinan que la matemática si es difícil para aprender, en diferentes grados de dificultades. Para ninguno de ellos el aprendizaje de las matemáticas resulta ser sencillo, la experiencia que han vivido a lo largo de sus estudios, considerando que la mitad de estudiantes ha reprobado la asignatura, tiene ya una predisposición para aprender, por lo cual afirma que es difícil (Santillán, 2015).

Esta pregunta presenta dos responsables de las dificultades para aprender, la asignatura en sí con un 80,65% y el docente responsable de ésta con 19,35%). En lo referente al software educativo Las 10 preguntas de la encuesta se agrupan en las siguientes dimensiones citadas anteriormente de acuerdo a la tabla 8 a continuación:

TABLA 8. Dimensión a diagnosticar

	DIMENSIÓN	PREGUNTA
1.	Rol docente	1, 4, 3
2.	Mejora del rendimiento	2, 4, 5, 6
3.	Alfabetización digital	7,8,9

Respecto al rol de docente como motivador e innovador, de acuerdo a los resultados deja entrever que en general el docente no motiva permanentemente a sus estudiantes, ni hace innovaciones tecnológicas en sus clases, causando de alguna manera desánimo en ellos por la monotonía de usar siempre los mismos recursos (Santillán, 2015).

En cuanto a mejorar el rendimiento si se incluyen TICs, los estudiantes en general manifiestan que al integrar software educativo, analítico y gráfico, el rendimiento mejoraría tomando en cuenta que el uso de recursos didácticos causa un impacto diferente en el aprendizaje. Además es importante recalcar que su opinión denota claramente la época tecnológica que viven diariamente cada uno de ellos, y si sumamos a eso el interés y gusto por la tecnología, añadir software educativo a las clases conseguirá un mejor impacto de asignatura (Santillán, 2015).

Si hablamos sobre la alfabetización digital, queda claro que el estudiante se encuentra al día en lo que se refiere a tecnología, sabe que es un correo electrónico, que es un software educativo, con seguridad maneja el internet, y manifiesta que es importante estar actualizado en el tema. Por el contario se puede observar que el docente presenta alguna dificultad en cuanto al uso de TICs, sea esto por la falta de capacitación, por falta de apertura para el uso de recursos didácticos tecnológicos o sea por la falta de infraestructura adecuada en la institución educativa (Santillán, 2015).

Para dar cumplimiento con la planificación se presenta un bloque, en conjunto con seis clases en las cuales donde se trató la temática correspondiente a inecuaciones lineales, haciendo énfasis en el recurso tecnológico a ser aplicado: Graph 4.4.2. (Santillán, 2015). En la tabla siguiente se muestran las actividades a desarrollar durante clase con el recurso Graph 4.4.2. y el tiempo usado con el recurso. La planificación por bloques curriculares, en los apartados de eje curricular integrador, eje de aprendizaje y eje transversal, es aporte del Ministerio de Educación; los otros apartados son diseñados por el investigador.

La planificación clase a clase es diseñada únicamente por el investigador, considerando las necesidades académicas institucionales y del entorno, que se presentan día a día en el aula, esto se realiza al durante el transcurso de cada año lectivo, en este caso 2014–2015 (Santillán, 2015).

CLASE	ACTIVIDAD USANDO GRAPH 4.4.2	DURACIÓN
Clase 1	No se usa Graph 4.4.2	---
Clase 2	No se usa Graph 4.4.2	---
Clase 3	Se realiza una introducción de Graph 4.4.2 de acuerdo al apartado del Software incluido en la sección del Marco Referencial. Se lo hace usando el laboratorio de computación.	Utilización 4 horas clase
Clase 4	Se desarrollan dos ejemplos en Graph 4.4.2 incluidos en el plan de clase. Se lo hace usando el laboratorio de computación. Al final se realizan los ejercicios propuestos (Anexo 21)	4 horas clase
Clase 5	Se desarrollan dos ejemplos en Graph 4.4.2 incluidos en el plan de clase. Se lo hace usando el laboratorio de computación. Al final se realizan los ejercicios propuestos (Anexo 23)	4 horas clase
Clase 6	Se desarrollan dos ejemplos en Graph 4.4.2 incluidos en el plan de clase. Se lo hace usando el laboratorio de computación. Al final se realizan los ejercicios propuestos (Anexo 25)	4 horas clase

APLICACIÓN Y EVALUACIÓN POSTEST

Aplicar el software gráfico Graph 4.4.2. en la unidad de aprendizaje sobre inecuaciones lineales, para 3ero de Bachillerato en la asignatura de Matemática de la Unidad Educativa Distrito Metropolitano permite realizar la aplicación de cada una de las clases planificadas en el apartado anterior, haciendo énfasis en el uso del software gráfico Graph 4.4.2.; a continuación se realiza el Postest a los estudiantes y se presenta los resultados obtenidos de varios enfoques: en primer lugar se hace una comparación general con el Pretest, en segundo se hace un análisis estadístico descriptivo de los resultados del Postest, en tercero se hace una comparación estadística descriptiva Pretest-Postest y como último punto se realiza un análisis estadístico profundo en la comprobación de la hipótesis (Santillán, 2015).

Después de realizar el Pretest y Postest, al realizar la comparación global entre los dos, se obtuvieron los siguientes resultados por pregunta indicados a continuación:

Tabla 10: Resultados generales Pretest vs. Postest por pregunta

	PRETEST		POSTEST	
INDICADORES	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE (%)**	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE (%)**
Correcto	**92**	**26,98**	**132**	**38,71**
Incorrecto	**249**	**73,02**	**209**	**61,29**
Total	**341**	**100**	**341**	**100**

Fuente: Test aplicado a los estudiantes de tercer año de bachillerato Contabilidad de la UEDM

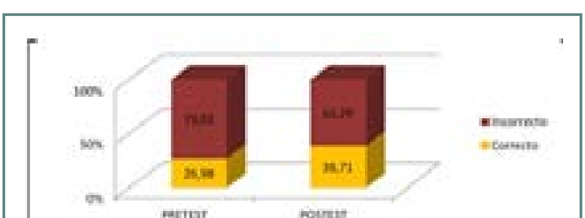


Gráfico 8:
Resultados generales pretest vs postest
Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del tercer año del bachillerato. Contabilidad de la UEDM.

Al comparar los resultados generales obtenidos en el Pretest y Postest, se puede observar que le promedio de acierto por pregunta tuvo una subida interesante, de un 26,98% a un 38,71%. A pesar de que el promedio alcanzado por pregunta no alcanza ni la mitad, se puede afirmar que el aplicar Graph 4.4.2. tuvo un efecto positivo. Sin embargo es necesario hacer uso de la estadística en sus distintos niveles (descriptivo e inferencial) de profundidad para aseverar con certeza esta afirmación (Santillán, 2015).

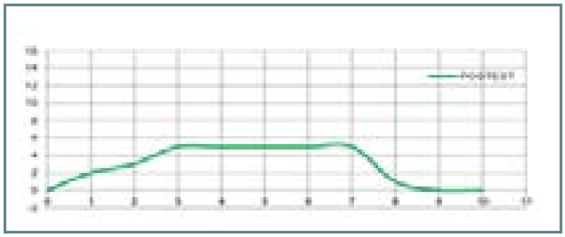


Gráfico 9: Curva postest
Fuente: Análisis estadístico descriptivo

En promedio los alumnos obtuvieron una nota de 4.55 lo cual de acuerdo a la escala de rendimiento indica que en general tienen un rendimiento regular. La nota que más se repitió fue 5 lo que implica un rendimiento regular. De acuerdo a la nota de la mediana que es 5, el 50% de estudiantes se encuentran sobre la media y más del 50% de los estudiantes evaluados se encuentra sobre el promedio, denotando el rendimiento regular. Además las notas se desvían de 4.55, en promedio 1.93 unidades. Ningún estudiante alcanzó la nota máxima de 11, la nota mayor fue 8 y la menor 1. En general las notas correspondientes al Postest se sitúan en valores medios indicando el rendimiento regular de los estudiantes (Santillán, 2015). Al tomar en consideración los resultados de los dos test, se puede apreciar que existe un cambio, un aumento en el rendimiento, de bajo a regular; por la tanto la intervención es positiva. Para realizar esta comparación se hace uso de las tablas 11, y también de los gráficos 10.

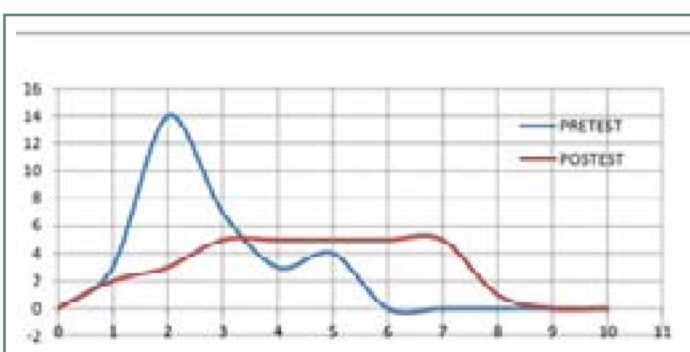


Gráfico 10: Curva Pretest vs Postest
Fuente: Análisis estadístico descriptivo

Tabla 11: Estadística Pretest - Postest

	Pretest	Postest
Media	2,7097	4,5484
Error típico	0,2135	0,3465
Mediana	2	5
Moda	2	5
Desviación estándar	1,1887	1,9294
Varianza de la muestra	1,4129	3,7226
Curtosis	-0,3140	-0,9220
Coeficiente de asimetría	0,7357	0,1381
Rango	4	7
Mínimo	1	1
Máximo	5	8
Suma	84	141
Cuenta	31	31

Fuente: Análisis estadístico descriptivo

CONCLUSIONES

La aplicación del software Graph 4.4.2. tuvo una incidencia positiva para mejorar el aprendizaje de las inecuaciones lineales en los estudiantes de 3ro de Bachillerato en la asignatura de Matemática de la Unidad Educativa Distrito Metropolitano, segundo quimestre 2014-2015, ya que los resultados muestran claramente una diferencia entre la media del Pretest (2,71) y la media del Postest (4,55), implicando una mejoría.

Se hace necesario mejorar el aprendizaje de las inecuaciones lineales a través de la aplicación del software gráfico Graph en los estudiantes de 3ero de Bachillerato en la asignatura de Matemática de la Unidad Educativa Distrito Metropolitano, segundo quimestre 2014-2015, ya que los resultados estadísticos muestran una media de 2,71 en el Pretest y una media de 4,55 en el Postest, y en ninguno de los casos alcanzan la mitad de la nota de la evaluación.

Los estudiantes se encuentran en una época en donde la tecnología digital es parte intrínseca de ellos, por lo cual es necesario usar recursos didácticos en los cuales se involucre permanentemente las TIC´S, de esta manera se pueden desenvolver como "peces en el agua", lo cual motiva y despierta curiosidad e interés por la asignatura, y como consecuencia mejora el rendimiento académico en general.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alonso, Á. V. (2014). *Didáctica de la tecnología.* España: Editorial Síntesis.

Calzadilla, M. E. (2002). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de educación*, 1, 1-10.

Cantoral, R. (2014). Matemática educativa: Relme, Clame y Relime. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-10.

D'Amore, B. F. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática.* Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Lind, D., Marchal, W. & Mason, R. (2004). *Estadística para administración y economía.* México D.F., México: Alfaomega Grupo Editor.

Soto, S. T., Sánchez, T. X., Martillo, E. & Sarmiento, C. (2015). *Calidad educativa.* Machala, Ecuador: Ediciones Utmach.

Santillán, D. O. (2015). *Implantación de software Graph 4.4.2 para potenciar el aprendizaje de las inecuaciones lineales en la asignatura de matemática,* en los estudiantes de 3er año contabilidad paralelo "A" de la Unidad Educativa Distrito Metropolitano 2014-2015, ciudad de Santo Domingo. Recuperado el 27 de Julio del 2015 de Repositorio PUCE: http://www.pucesd.edu.ec/index.php/disertaciones_maestria_tecnologias_gestion_practica_docente/693-_graph.html

LAS CONCEPCIONES SOBRE LA MATEMÁTICA Y SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE QUE SUBYACEN EN UN CAPÍTULO SOBRE SECCIONES CÓNICAS

Vicente Messina, Marina Revelli, Isabel Pustilnik, Carlos Pano

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires, Argentina.

vrmessina@arnet.com.ar, mrevelli@gmail.com, Isabel.pustilnik@gmail.com, cpano@doc.frba.utn.edu.ar

FECHA DE RECEPCIÓN: 17/03/17, FECHA DE ACEPTACIÓN: 3/11/17

RESUMEN

En este trabajo es analizado un capítulo sobre secciones cónicas. Se discuten algunas concepciones sobre la matemática y sus efectos en la enseñanza y el aprendizaje y se analizan las concepciones subyacentes en el texto. Es utilizada la estructura de diagrama de árbol para representar la organización de los contenidos. Se analizan los objetivos que los autores plantean en las secciones, así como el tratamiento de los contenidos temáticos y el lenguaje que utilizan. Se identifican los temas importantes mediante un criterio externo. Los ejercicios propuestos son clasificados según el relato de sus enunciados y según las demandas cognitivas que exigen. Se ubica al capítulo entre los textos tecnológicos.

ABSTRACT

In this paper a chapter about conics sections is analized. We discuss some conceptions about mathematics and their effect on teaching and learning. We infer about underlying conceptions in the text. We use a tree diagram structure to represent its contents organization. We study the chapter sections thoroughly to comment the objectives that the authors consider, the treatment about thematic contents and the language that they use. We identify which are the most important topics using an external criterion. We classify proposed exercises according to their statement and the cognitive demand required to solve them. This chapter is categorized as a technological text.

PALABRAS CLAVE:

clasificación de ejercicios - cónicas

KEYWORDS:

text structure - exercise classification - conics

INTRODUCCIÓN

Motivados por el análisis y conclusiones sobre un trabajo experimental realizado con nuestros alumnos, basado en un capítulo del libro de Kozak, Pastorelli, Vardanega (2007), nos propusimos analizar las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje subyacentes en el texto. El libro fue escrito por tres profesores de distintas Facultades Regionales de la Universidad Tecnológica Nacional, con destacadas trayectorias en la docencia universitaria. Si bien fueron tres los autores, para analizar el texto, construimos un nuevo autor, lo imaginamos como un maestro conocedor de la disciplina que enseña, como un ser humano cuyas ideas y pensamientos están marcado por la vida vivida, sus experiencias y su labor docente. Un autor que interpreta los contenidos que escribe desde su marco cognoscitivo que es propio y único. A ese marco Alba Gonzales Thompson lo denomina concepciones. Para ella, las concepciones constituyen “una estructura mental general que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y gustos” (Thompson, 1992, p. 130).

A partir de las observaciones, análisis de documentos, de las opiniones, de las respuestas a preguntas sobre su práctica, Contreras (1998) define como la concepción de un profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática al conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica en relación con las cuestiones que puedan surgir respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Las concepciones son existencias personales de cada sujeto. Al haber tres autores del libro, cada uno con sus propias ideas y, al plantearnos inferir las concepciones a partir del capítulo leído, tuvimos que apelar a la figura del autor construido y pensarlas con forma de constructos hipotéticos. Las explicaciones y conclusiones de este trabajo se refieren a ese autor y no a los reales.

El capítulo de nuestro interés versa sobre secciones cónicas. Distintos autores pueden escribir sobre un mismo asunto matemático de diversas maneras. El tratamiento elegido depende de la visión sobre la matemática que el autor tenga, del ordenamiento dado a los subtemas, del fin que persiga, de los recursos que utilice para presentar los contenidos a la audiencia a la que decidió dirigirse, de sus predilecciones personales, es decir, de sus concepciones.

En la investigación de Moreno y Azcárate (2003), se muestra que, entre otros factores, las concepciones de los profesores universitarios de matemática tienen respecto a la matemática influyen en su práctica docente.

Los textos, en particular el de nuestro interés, tienen por un lado, una marca subjetiva; Dubois (2005) afirma que, según el enfoque psicolingüístico, "el sentido del texto no está en las palabras u oraciones que componen el mensaje escrito, sino en la mente del autor y en la del lector cuando reconstruye el texto en forma significativa para él" (Dubois, 2005, p. 11).

Por otro lado, la organización materializada del contenido le otorga un carácter eminentemente objetivo. Ambos lados interesan porque dan cuenta de las concepciones del autor. En tanto el capítulo se use en un curso para el tratamiento del tema Secciones Cónicas determinará, en forma explícita o implícita y en gran parte, la forma en que el profesor encare la enseñanza y las actividades de aprendizaje que realizarán los alumnos. De acuerdo Litwin (2008) en la praxis docente se entrecruzan el estilo de enseñanza del profesor y el proceso de aprendizaje de los alumnos.

CONCEPCIONES SOBRE LA MATEMÁTICA

Son muchos los pensadores, vinculados a la actividad matemática que, a través de los tiempos, han reflexionado acerca de esta disciplina. La reflexión sobre qué es el conocimiento matemático forma parte de la epistemología e interesa a la hora de analizar el capítulo sobre secciones cónicas. A manera de ejemplo comentamos algunas pocas de estas consideraciones. Ana Elena Narro Ramírez (1997) en su artículo nos cuenta:

> Para Galileo Galilei (Físico y astrónomo italiano, 1564-1642) la matemática es indispensable para lograr un conocimiento formal, concepción que resalta al afirmar que: "Con la Matemática el hombre alcanza el pináculo de todo conocimiento posible, un conocimiento no inferior al que posee la inteligencia divina"
>
> Isaac Newton (Físico inglés, 1642-1727) indica que la Matemática predice o descubre los fenómenos de la Naturaleza. Newton es autor de "Principia Mathematica", donde presentó un esquema innovador del universo, que cierra con broche de oro la revolución científica. (Narro Ramírez, 1997, p. 257)

Para Galileo la matemática transcurre entre reglas y objetos ideales conformando un conocimiento supremo, en cambio para Newton se conecta con el mundo a través de la naturaleza.

Jean Kuntzmann (Matemático francés, 1912-1992) es conocido por sus trabajos en matemáticas aplicadas y ciencias de la computación que, desde épocas muy tempranas, han producido desarrollos en ambos campos. En Kuntzmann (1969) escribió:

> Una definición de la matemática por su método es más estable y no ha cambiado desde la antigüedad griega hasta nuestros días. La matemática desarrolla, a partir de nociones fundamentales, teorías que se valen únicamente del razonamiento lógico. El grado de lucidez de esta manera de obrar tal vez haya variado en el transcurso del tiempo, o según los diversos individuos, pero su naturaleza no se ha alterado. El objeto sobre el cual versa el razonamiento matemático es por sí mismo arbitrario. Basta que un determinado objeto de estudio permita el tratamiento matemáti-

> co, que le interés a un matemático, o aquellos en beneficio de los cuales trabaja, para que nazca un nuevo capítulo de la matemática (Kuntzmann, 1969, p. 12).

Richard Courant (Matemático alemán con nacionalidad estadounidense, 1888–1972) fue asistente de David Hilbert, quien fue el director de su tesis doctoral. Fue profesor de la Universidad de Nueva York. Allí fundó el que hoy se conoce como Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, que es un respetable centro de investigación en matemáticas aplicadas. Herbert Robbins (Matemático estadounidense, 1915–2001) fue uno de los matemáticos más destacados del siglo XX. Muchos de los resultados que logró como investigador hoy llevan su nombre. Courant y Robbins fueron los autores de la obra ¿Qué es la Matemática? Allí podemos leer:

> La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque diversas tradiciones han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia matemática (Courant y Robbins, 1979, p. 3).

Kuntzmann, en el libro que citamos, reconoce que la matemática va cambiando e incorporando nuevos resultados y teorías a lo largo del tiempo. Esto hace imposible definirla por sus contenidos. Por eso opta por definirla por su método. Al hacerlo pone en primera línea el razonamiento lógico ocultando otras formas de pensamiento. En cambio, Courant y Robbins entienden que la matemática requiere también otros tipos de razonamientos. Necesita de la intuición, de lo plausible, del todo y las partes, de lo abstracto y lo concreto. Su valor está en la síntesis de las fuerzas opuestas que mencionan en el párrafo que transcribimos.

CONCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Para pensar cómo las concepciones de un profesor o autor, sobre la matemática, repercuten en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina destacamos su naturaleza dual. De acuerdo con Douady (1986) esta dualidad dialéctica objeto-herramienta es posible considerarla como un sistema abstracto y autocontenido o como un instrumento para la resolución de problemas prácticos en situaciones reales. Tenemos así dos caras de una misma moneda.

Quien se apoya fuertemente en la primera cara considera que los objetos matemáticos tienen una existencia propia. Para él, objetos tales como la parábola o la simetría existen de la misma manera que una pelota de fútbol, independientemente de cualquier contexto cultural. Para enseñarlos sólo hay que mostrarlos, definirlos e indicar sus propiedades tal como se haría con la pelota, mostrarla, reparar en su forma y material con que está hecha, hacerla picar. Se aprende lo que el profesor o el texto da. Es un aprendizaje receptivo, el alumno o el lector guarda los contenidos que recibe en su memoria, puede repetirlos pero no vincularlos con otros conocimientos o situaciones del mundo real. Quien se sostiene en la otra cara ve la otra dimensión de la matemática, menos abstracta y descontextualizada, más funcional y relacionada con la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada. La enseñanza y el aprendizaje no se pueden separar, en este sentido, de la acción concreta sobre los objetos, del razonamiento inductivo, de los procedimientos heurísticos ni tampoco de los instrumentos y recursos tecnológicos que ayudan a aprender. Los aprendices son activos e interactivos en la construcción de sus propios conocimientos, con las herramientas de las que disponen, con lo que ya conocen y con la mediación de la cultura en la que están inmersos. Las actividades de aprendizaje son tanto individuales como sociales.

LA ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

Entendemos la organización del capítulo como el conjunto de principios mediante los cuales el autor, conforme a sus propósitos, decide el peso de importancia de cada sección, las partes que las integran, las relaciones de subordinación entre los contenidos de cada sección y entre las secciones. La figura 1 muestra una representación simplificada de esos principios. Esa representación se denomina Diagrama de Árbol. Los contenidos aparecen con la numeración que les otorgó el autor.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

De acuerdo con Vilar, Gomez y Tejero (1997) el Diagrama de Árbol es una herramienta que permite una mejora de la calidad en el ciclo PDCA (Plain: planificar, Do: hacer, Check: comprobar, Act: actuar) que permite identificar los medios necesarios para alcanzar una meta o resolver un problema, en la etapa de planificación, a través de una visión global del objeto de estudio. Partiendo de una información general, como la meta a alcanzar, se incrementa gradualmente el grado de detalle sobre los medios necesarios para su consecución. Este mayor detalle se representa mediante una estructura en la que se comienza con una meta general (el “tronco”) y se continúa con la identificación de niveles de acción más precisos (las sucesivas "ramas"). Las ramas del primer nivel constituyen medios para alcanzar la meta pero, a su vez, estos medios también son metas, objetivos intermedios, que se alcanzarán gracias a los medios de las ramas del nivel siguiente. Así repetidamente hasta llegar a un grado de concreción suficiente sobre los medios a emplear.

La utilización del Diagrama de Árbol permite descomponer cualquier meta general, de modo gráfico, en fases u objetivos concretos, así como determinar acciones detalladas para alcanzar un objetivo.

En el caso que nos ocupa la meta general consiste en la exposición del tema Secciones Cónicas. De este tronco se desprenden una pluralidad de ramas de primer nivel; son las doce Secciones, la Autoevaluación y el Glosario.

Las Secciones indican los contenidos temáticos (medios) para alcanzar la meta, y también son las ramas iniciales de los ramales que parten del tronco. La Autoevaluación se puede considerar como una falsa rama ya que no apunta hacia la meta; propone once ejercicios para que el lector pueda verificar en qué medida comprendió lo leído. El Glosario precisa de manera compacta los términos considerados importantes y utilizados en el desarrollo del capítulo.

Las Secciones son a su vez metas intermedias que se alcanzan con los contenidos de las ramas del segundo nivel que llamaremos Sub-secciones. Las Sub-secciones también pueden pensarse como metas que se alcanzan con los contenidos de las ramas del tercer nivel. De esta manera van apareciendo contenidos que, más detalladamente, aportan al alcance de la meta. Si se nos permite la terminología, llamaremos a las ramas del tercer nivel Sub-sub-secciones. Las Sub-sub-secciones son a la Sub-sección lo que la Sub-sección es a la Sección. El mismo criterio se puede emplear para las Sub-sub-sub-secciones.

A modo de ilustración mostramos los contenidos de la Sección 3.2 señalados con la terminología usada.

3. Capítulo: Secciones cónicas
3.2. Sección: Lugar geométrico de R2
3.2.1. Sub-sección: Lugares geométricos simétricos
3.2.1.1. Sub- sub-sección: Simetría con respecto a una recta
3.2.1.1.1. Sub- sub-sub-sección: Simetría con respecto al eje y

3.2.1.1.2. Sub- sub- sub-sección: Simetría con respecto al eje x
3.2.1.2. Sub-sección: Simetría con respecto a un punto
3.2.1.2.1. Sub- sub- sub-sección: Simetría con respecto al origen de coordenadas

La figura 1 muestra el diagrama de árbol cuyo tronco y las sucesivas ramas se señalan con los identificadores que les otorga el índice.

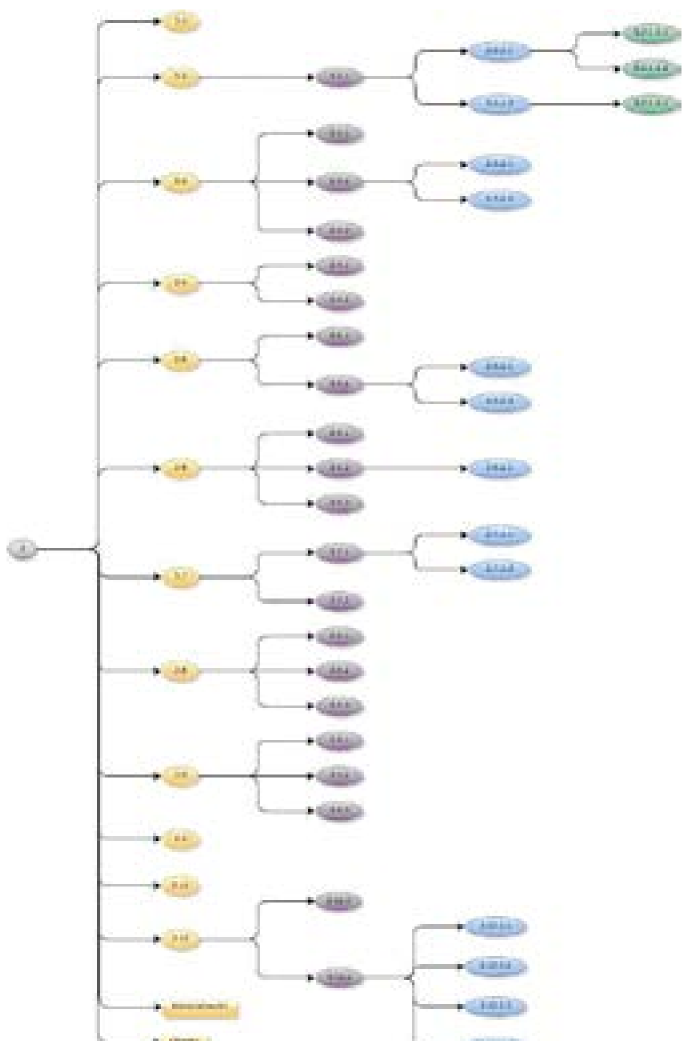


Figura 1. Diagrama de árbol de la organización de los contenidos

LAS SECCIONES

En el contexto de la experiencia, encaramos este trabajo para pensar las ayudas que el profesor debe brindar tanto como para que los estudiantes hagan una lectura reflexiva del capítulo como para que realicen las actividades pedidas. Desde esta preocupación nos interesa encontrar respuesta a preguntas, hechas al capítulo, tales como: ¿Qué objetivos plantea? ¿Cómo se presentan los contenidos? ¿Cómo aparecen las definiciones? ¿Cómo se diferencian las definiciones de las proposiciones demostrables? ¿Cómo se relacionan las secciones? ¿Qué muestran los ejemplos? ¿A qué apuntan los ejercicios? ¿Qué recursos y estrategias metodológicas se requieren para resolverlos?

La sección 3.1 es de presentación del tema tratado en el capítulo. Plantea un problema de aplicación a la ingeniería que es resoluble con los procedimientos que se desarrollan en las secciones posteriores. Comenta, con información pertinente, que las cónicas revisten un papel importante, tanto en la física en general, como en la ingeniería en particular. Formula los objetivos que transcribimos a continuación. En la sección 3.1 se puede leer:

Esperamos que al finalizar la lectura comprensiva y activa del presente capítulo, usted sea capaz de dar respuesta a problemas fundamentales de la geometría analítica como:

- Dada una ecuación de dos variables f(x;y) = 0, determinar el lugar geométrico (si existe) que representa en el plano cartesiano (x;y), lo cual significa estudiar la disposición relativa de los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación. A esto se le llama interpretar geométricamente una ecuación.
- Dadas las condiciones geométricas que debe reunir un conjunto de puntos que tenga coordenadas (x;y), determinar una ecuación donde todos los pares coordenados (x;y) la verifiquen. A esto se le llama interpretar algebraicamente una curva.
- Reconocer cada una de las cónicas, tanto por sus propiedades geométricas como por las analíticas. (Kozak et al., 2007, p. 164)

Al plantear los objetivos del capítulo el autor revela sus intenciones, lo que pretende que logren los usuarios del texto con su lectura y con las actividades que la acompañen. Los dos primeros son objetivos referidos a aprender un procedimiento. Un procedimiento que lleva a hacer una interpretación. El tercero es un objetivo referido a aprender conceptos y conocer propiedades. Falta un objetivo referido a desarrollar una actitud o valorar alguna cuestión. Los objetivos señalados expresan más las capacidades que el estudiante debe asumir que lo que puede aplicar, construir o crear.

Las restantes secciones están dedicadas al desarrollo de los contenidos. La numeración de las secciones determina la secuenciación de los contenidos y, en el árbol, se corresponde con la ubicación de las ramas del primer nivel de la primera hasta la última. Si bien necesariamente unas secciones deben preceder a otras, algún cambio en el orden es posible sin que ocasione dificultad para la lectura o estudio del tema. Esto otorga cierta facilidad para acomodar la lectura a diferentes propuestas. De todos modos, así como quien trepa a un árbol sabe que para alcanzar una rama debe apoyarse en otra anterior, el lector del capítulo debe tener en cuenta que para leer una sección se requiere conocer alguna anterior.

Los contenidos aparecen en definiciones, demostraciones, figuras, ejemplos y ejercicios. Las palabras teorema, lema, proposición, procedimiento no se encuentran en el texto, sí la palabra regla pero en sólo dos lugares. Esas palabras generalmente aparecen en los textos que enfatizan la estructura sistemática de la matemática y la deducción. En cambio es, la que consideramos, una presentación que no acumula enunciados y reglas para que los contenidos se distribuyan con continuidad. Está adaptada a la audiencia a la que se dirige, la lectura está facilitada por las figuras y requiere del lector manejo del lenguaje algebraico.

Una entre otras clasificaciones posibles, ha señalado tres tipos de contenidos diferentes: los contenidos verbales (lo que el alumno aprende a decir), los contenidos procedimentales (lo que el alumno aprende a hacer) y los contenidos actitudinales (las formas en que aprende a comportarse). (Pozo, 1999)

Las definiciones y otros contenidos conceptuales (verbales) están destacados en espacios rectangulares sombreados. Los contenidos procedimentales se muestran generalmente con los ejemplos y se da en los ejercicios la posibilidad de aplicarlos.

Los treinta ejemplos están ubicados en recuadros y se identifican como “Ejemplo n” con $1 \leq n \leq 30$. Los 32 ejercicios se nombran como “Ejercicio 3-n” con $1 \leq n \leq 32$. Las figuras, que ilustran los contenidos, se designan como “Figura 3-n” con $1 \leq n \leq 87$. Si bien cada sección cuenta con ejemplos, ejercicios y figuras propios, la nomenclatura indicada, que los numera del primero al último, no acuerda con esa circunstancia.

El lenguaje matemático echa mano a varios modos de expresar un contenido. Así ocurre en el aula, en los libros, en los archivos magnéticos y en otros soportes. Para Janvier (1987) los principales modos de representación son cuatro: descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. El capítulo utiliza de manera profusa tres de estos modos. No aparecen tablas pero si un cuadro que resume las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de segundo grado incompleta represente una cónica.

LOS TEMAS IMPORTANTES

Para determinar la importancia relativa que el autor le da a los temas que trata nos apoyamos en la siguiente cita:

> Autores como Gimeno (1995) o Apple (1989) indican que, en las investigaciones relacionadas con los libros de texto, es necesario analizar tanto la posición de las diferentes unidades como la cantidad de páginas dedicadas a cada una de las unidades. Según estos autores, esta información permite establecer la importancia que dan los autores o el grupo editorial a la unidad que se estudia. (Serradó Bayés y Azcaráte Goded, 2003, p. 70)

De acuerdo con esta indicación observamos en la tabla 1 que las secciones que ocupan un mayor número de páginas son: 3.6 Elipse, 3.7 Parábola, 3.8 Hipérbola y 3.12 Formas paramétricas de las cónicas. El autor, en su desarrollo, da mayor importancia a las cónicas propias, sus elementos y sus ecuaciones incluidas las paramétricas.

En sentido contrario, observamos que las secciones que ocupan menos páginas son: 3.1 Ingeniería y cónicas, 3.4 Superficie cónica y curvas cónicas, 3.10 Excentricidad y definición general de cónica y 3.11 Algunas propiedades de las cónicas y sus aplicaciones. El autor otorga menor importancia a las definiciones geométrica y general y a las aplicaciones.

La cantidad de páginas correlaciona positivamente con la cantidad de ejercicios y con la cantidad de ejemplos (corr(cantidad de páginas; cantidad de ejercicios) = 0,60 y corr(cantidad de páginas; cantidad de ejemplos) = 0,74), por lo que las cantidades de ejercicios y ejemplos también muestran la importancia que los autores asignan a cada sección.

La tabla 1 también contiene esas cantidades

Sección	Páginas	Ejercicios	Ejemplos
3.1	1,6	0	0
3.2	5,9	0	5
3.3	4,8	2	4
3.4	2,0	0	0
3.5	7,8	8	5
3.6	8,0	5	3
3.7	9,7	3	4
3.8	8,0	4	2
3.9	4,9	1	1
3.10	2,7	1	2
3.11	2,1	4	0
3.12	9,5	4	4
Autoevaluación	2,7	11	0
Glosario	1,6	0	0
Total	71,3	43	30

Tabla 1. Cantidad de páginas, ejercicios y ejemplos por sección

LOS EJERCICIOS

El enunciado

Varios autores, entre otros Pano, Fridman, Rodil Martínez, Torre y Zion (2011), distinguen entre ejercicios y problemas. En consonancia con el autor del capítulo no haremos aquí esa distinción y utilizaremos el término ejercicios para ambos conceptos.

Según el relato del enunciado los ejercicios pueden ser: (a) de relato de una realidad, (b) de relato de tono realista, (c) de relato meramente matemático y (d) de relato de investigación matemática. Esta clasificación no es exhaustiva pero contempla a los ejercicios que generalmente aparecen en los libros de texto de matemática. Definimos y ejemplificamos estos modos de relato como sigue:

a) Relato de una realidad

El enunciado invita al lector a actuar concretamente. Plantea la resolución de un problema real que requiere el manejo de conceptos y procedimientos matemáticos y la realización de actividades como medir, estimar, obtener información, diseñar, dibujar, modelar o decidir.

Ejemplo propio: En un sector de Facultad un pasillo separa, a un lado y al otro, las aulas. Se trata de construir en el piso de ese pasillo una cadena de elipses tangentes dos a dos y tangentes a las paredes. La parte del piso interior a las elipses llevará un embaldosado diferente al de la parte exterior. Hay que determinar la cantidad de elipses de la cadena, dibujarlas sobre el piso, calcular la mínima cantidad de baldosas de cada tipo a usar y el costo de realización del trabajo de embaldosado.

b) Relato de tono realista

El enunciado lleva al lector a aplicar los contenidos del texto a una situación concreta, descrita en lenguaje cotidiano. La resolución del ejercicio implica una traducción del enunciado al lenguaje formal de la matemática. Se trata de simular una cuestión con visos de realidad. En el enunciado se encuentran todos los datos necesarios para resolver el ejercicio.

Ejemplo: Ejercicio 3.26 de Kozak et al (2007)

> Para construir la base circular de un tanque de forma cilíndrica, se replantean en el terreno tres puntos cuyas coordenadas, expresadas en metros con respecto a un sistema de referencia local, son A(5;3), B(6;2) y C(3;-1). Se pide:
> a) Determinar una ecuación de la circunferencia de la base y expresarla en la forma general de la ecuación de segundo grado.
> b) Si la altura del tanque es de 2,60 metros, ¿cuál es su volumen?
> c) Si en ese tanque se quieren colocar 34,12 toneladas de un fluido cuyo peso específico es de 1,08 kg/dm3, ¿cuál debería ser la altura mínima del tanque para recibir la totalidad de dicha carga?
> (Kozak et al, 2007, pp. 219-220)

c) Relato meramente matemático

El enunciado hace referencia a objetos matemáticos como ejes coordenados, ecuación, parábola, tangente, lado recto u otros. La resolución del ejercicio requiere hacer cálculos y utilizar conceptos y procedimientos que el texto contiene como contenidos. La respuesta puede ser pedida en algún modo de representación pertinente.

Ejemplo: Ejercicio 3.20 de Kozak (2007) et al:

¿Para qué valores de t la recta $y = \frac{1}{3}x+t$ corta la hipérbola $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$? (Kozak et al, 2007, p. 210)

d) Relato de investigación matemática

El enunciado está relacionado con contenidos matemáticos de cierta complejidad y la resolución del ejercicio requiere desplegar estrategias que incluyen procesos como conjeturar, probar, demostrar, encontrar, representar, argumentar o mostrar un contraejemplo. Pretende del lector la realización de una actividad próxima a la propia de la matemática.

Ejemplo propio: Represente, en el sistema habitual de ejes coordenados, las cónicas pero utilizando en su definición, como lugar geométrico, la distancia de Minkowski en lugar de la euclídea.

La Tabla 2 muestra la cantidad de ejercicios por modos de relato que contiene el capítulo.

Modos	Ejercicios
A	0
B	4
C	28
D	0

Tabla 2. Distribución de los modos de relato.

Conocemos dos posiciones con respecto a cómo ubicar la matemática en el contexto de la formación del ingeniero. Una considera que el estudiante tiene primero que aprender esta ciencia para luego tenerla como herramienta para abordar los estudios propios de la especialidad elegida. La otra considera que los contenidos matemáticos deben presentarse subordinados al problema ingenieril y que las prácticas propuestas deben acercar al alumno a las formas del ejercicio profesional. Sabemos también que estas posiciones no aparecen en estado puro tanto en las aulas como en los textos.

Apreciamos sobre la base de la distribución de los modos de relato de los ejercicios, representada con la Tabla 2, que el capítulo está más cerca de la primera posición que de la segunda. Los siete octavos de los ejercicios son de relato meramente matemático, el octavo restante corresponde a ejercicios de relato de tono realista, no hay ejercicios de relato de una realidad ni tampoco de relato de investigación matemática.

Las demandas cognitivas

Fernando Acero, en su Tesis Doctoral, nos comenta sobre la investigación QUASAR:

> Una investigación que abarca un período de cinco años (1990-1995) en escuelas medias de Estados Unidos es (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning), conocida por la sigla QUASAR (Brändstrom 2005, Henningsen y Stein 1997, Stein y Smith Schwan 1998), establece una clasificación de las demandas cognitivas de los ejercicios según que su resolución exija: (a) memorización, (b) procedimientos desconectados de conceptos, (c) procedimientos conectados con conceptos, (d) el ejercicio efectivo de la matemática. Según QUASAR, los ejercicios que demandan memorización implican la reproducción de hechos, reglas o expresiones previamente aprendidas; los procedimientos inconexos son los que requieren de un algoritmo que se aplica sin ambigüedad y están orientados a producir una respuesta correcta; los procedimientos significativos requieren de alguna elección de procedimientos alternativos y reclaman su conexión con los conceptos o definiciones centrales; finalmente, el ejercicio efectivo de la matemática exige un pensamiento complejo no algorítmico para ser aplicado a una situación cuya resolución no está sugerida por el ejercicio o actividad propuesta, necesita de una regulación autónoma del estudiante en el control de los procedimientos y la satisfacción de las restricciones (Acero, 2014, p. 9).

Para clasificar los ejercicios del capítulo según el criterio QUASAR, uno de los autores de esta ponencia trabajó separadamente con otros dos siguiendo los criterios de Cruz Ampuero (2014). En cada trabajo se asignó la letra de una clase a cada ejercicio. En ambas oportunidades hubo coincidencia en la asignación. De estos trabajos resultó la tabla 3.

Clase	Ejercicios
A	0
B	16
C	15
D	1

Tabla 3. Distribución de las clases QUASA

La Tabla 3 muestra que hay igual número de ejercicios de baja demanda cognitiva (clases A y B) y de alta demanda cognitiva (clases C y D). No encontramos ejercicios que para su resolución exijan sólo memorización. Algunos ejercicios del capítulo se resuelven con la aplicación de un algoritmo o la utilización de un procedimiento mostrado en un ejemplo. Otros necesitan de la combinación de recursos como la apelación a un gráfico, la aplicación de fórmulas previamente conocidas o encarar un procedimiento general con conexiones cercanas a ideas conceptuales subyacentes.

EL CAPÍTULO Y LAS CONCEPCIONES SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA MATEMÁTICA QUE LO SOSTIENEN

En un intento de atribuir las concepciones sobre el aprendizaje y sobre la matemática que el capítulo sugiere, nos inspiramos en las ideas que González Astudillo y Sierra Vázquez (2004) utilizan en su metodología de análisis de libros de texto. Estos autores clasifican los manuales en tres perfiles según la dominante entre tres modalidades: expositiva, tecnológica y comprensiva. Adoptamos estas modalidades con las modificaciones a sus significados que siguen:

Expositivos. Son textos con una visión de la matemática como acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva, en la que, partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen algunos pocos ejemplos. Enfatizan el significado matemático de los conceptos y la lógica de los procedimientos matemáticos. Sus contenidos son eminentemente conceptuales. El carácter formal de los contenidos presenta a la matemática como un cuerpo estático, impidiendo su uso en otros contextos y el desarrollo de la creatividad. Llevan a un aprendizaje de tipo memorístico y a fomentar la repetición de conceptos sin la debida comprensión. Están emparentados con la primera cara de la moneda matemática descrita up supra.

Tecnológicos. Son textos que conciben la matemática como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas y destrezas para pensar los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones. Son concisos en las definiciones de los conceptos para luego exponer los procedimientos en variados ejemplos. Ponen el énfasis en las reglas y los procedimientos aunque los organizan, junto con los conceptos, en una forma lógica. Sus contenidos son principalmente procedimentales. Otorgan a la matemática un carácter práctico. Proponen una ejercitación abundante para afianzar los procedimientos expuestos. La aplicación repetitiva de las reglas y procedimientos favorece el aprendizaje memorístico y coloca al lector en un lugar de sujeto reproductor.

Comprensivos. Son textos que ven la matemática como un cuerpo de conocimientos apropiado para interpretar la realidad, entendida ésta en sentido amplio. La presentan como objetos de aprendizaje que, además de poseer significado, tienen la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes. Presentan actividades que, para realizarlas, requieren de la experimentación. El aprendizaje de la matemática se logra con la construcción de redes conceptuales que la conectan con otros conceptos partiendo de situaciones propias de la realidad. Subyace la concepción de un aprendizaje significativo relevante. Mantienen una relación de afinidad con la segunda cara de la moneda matemática.

Los contenidos del capítulo están organizados de una manera lógica razonablemente representada por un diagrama de árbol. Las ideas expuestas aparecen aplicadas en los ejemplos. Se nota un énfasis en el hacer procedimental dirigido al manejo algebraico, al cálculo numérico y a la representación gráfica. Formula una matemática práctica que utiliza en los desarrollos y ejemplos, y alcanza para resolver los numerosos ejercicios propuestos. Por ello ubicamos al capítulo entre los textos Tecnológicos.

CONCLUSIONES

En nuestra opinión, para las prácticas de enseñanza habituales hoy en las universidades argentinas, en particular la Universidad Tecnológica Nacional, donde nos desempeñamos, el capítulo analizado es un texto adecuado para ser leído por los alumnos que comienzan sus estudios de ingeniería y que deben encarar el tema Secciones Cónicas. Teniendo en cuenta la importancia que el autor le da a los temas y el relato del enunciado de los ejercicios concluimos que el profesor que lo adopte como material de estudio en su curso, deberá acentuar el carácter ingenieril de las seccione cónicas. Por lo anteriormente señalado categorizamos el texto como tecnológico. Observamos que el capítulo no hace mención de las tecnologías de información y de la comunicación y de las posibilidades que ofrecen para ayudar al aprendizaje de lo tratado. El autor no indica un software especializado que permita el manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulación de la matemática involucrada. El contenido preponderante en los ejemplos y ejercicios propone, tareas a los lectores, en sintonía con las prácticas tradicionales de enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acero, F. (2014). *Libros de texto de matemática en carreras de ingeniería:* Un análisis estructural. Tesis doctoral. Repositorio Digital San Andrés. Recuperado de http://repositorio.udesa.edu.ar/jspui/handle/10908/2493 el 7 de noviembre de 2017.

Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Recuperado el 22 de febrero de 2017 de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2953

Courant, R. y Robbins, H. (1979)- *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

Cruz Ampuero, G. (2014) *La Demanda Cognitiva como Oportunidad de Aprendizaje en el Área Matemática.* Slideshare disponible en https://docs.google.com/document/d/1zTvdClgBslqDwz9xPdGkR5eGt_ej0uX24x-Gj0WzLok0/edit.

Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathemátiques. Une réalisation ans tout le cursus primaire.* https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/document. Recuperado el 22 de febrero de 2017.

Dubois, M. E. (2005). *El proceso de lectura: de la teoría a la práctica.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Gonzalez Astudillo, M. T.; Sierra Vázquez, M. (2004) Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Críticos en la Enseñanza Secundaria en España durante el Siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, V. 22 N. 3, p. 389-408. Recuperado el 7 de noviembre de 2017 de https://ddd.uab.cat/record/1672
Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kozak, A. M.; Pastorelli S.; Vardanega, P. (2007) *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal.* McGraw-Hill Interamericana.

Kuntzmann, J. (1969) *¿A dónde va la matemática? Problemas de la enseñanza y la investigación futuras.* Buenos Aires: Siglo XXI.

Litwin, E. (2008). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la educación superior.* Buenos Aires: Paidós.

Moreno, M. y Azcárate. C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2), 265-280. Recuperado de http://repositori.udl.cat/bitstream/handle/10459.1/31328/21935-21859-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y el 16 de marzo de 2017.

Narro Ramirez, A. (1997). Investigación sobre la concepción de la Matemática en las ciencias sociales en la

UAM – Xochimilco. *Política y Cultura*, n° 9, pp. 249 – 280. Universidad Autónoma Metropolitana. México. Recuperado de: http://www.redalyc.org/html/267/26700914/ el 7 de noviembre de 2017.

Pano, C. O.; Fridman, C.; Rodil Martínez, A.; Torre, V.; Zion, V. (2011). Apuntes sobre innovación en educación universitaria. Buenos Aires: Ediciones Rosel.

Pozo, J. (1999). Aprendizaje de contenidos y desarrollo de capacidades en la educación secundaria. En: Coll, C. (Coord.) *Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria.* Barcelona: Editorial Horsiri.

Serradó Bayés A.; Azcaráte Goded M. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática,* V.15, N. 1, pp. 67-98.

Thompson, A. (1992). Teachers' belief and conceptions: A synthesis of research. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Vilar, J.; Gomez, F.; Tejero, M.; (1997). *Las siete nuevas herramientas para la mejora de la calidad.* Madrid: FCEditores.

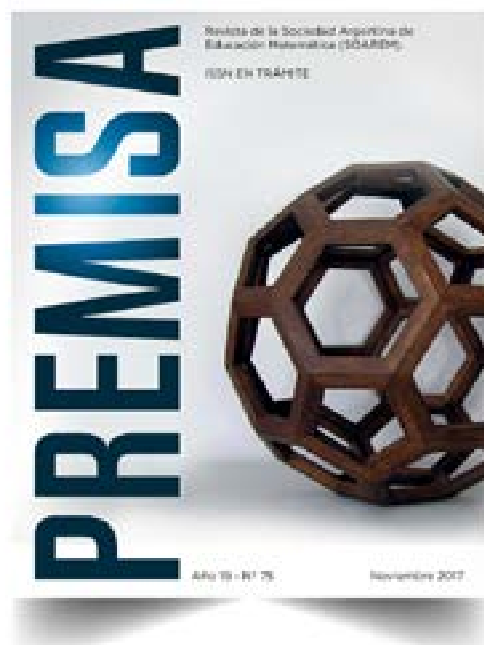
PREMISA

INSTRUCCIONES PARA LA PUBLICACIÓN DE ARTÍCULOS

La Revista Premisa es la revista oficial de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM). Esta revista es publicada trimestralmente en los meses de febrero, mayo, agosto y noviembre. Uno de sus fines es brindar un espacio de intercambio y enriquecimiento a profesores, investigadores, formadores de docentes y estudiantes, por medio de la divulgación de trabajos de investigación y desarrollo en el campo de la educación matemática. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones empíricas o teóricas, estudios de casos, revisiones de la literatura en áreas específicas de investigación o propuestas didácticas, en formato de artículo de matemática educativa. Las temáticas que abordan los artículos pueden ser: problemáticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática de los distintos niveles de enseñanza, resultados de investigaciones en la matemática educativa, análisis de experiencias de aula, análisis de textos de estudio en vigencia, análisis críticos de estados del arte actualizados de alguna problemática didáctica o propuestas de modelos metodológicos sustentados en antecedentes teóricos y empíricos. Cualquier otro tipo de contribuciones serán sometidas a la consideración del editor.

Los artículos deben tener una **extensión máxima de 12 páginas** a espacio simple en hoja tamaño carta letra Times New Roman tamaño12. Las normas para las citas y referencias se deben realizar en formato American Association of Psychology (APA). La primera página debe contener el nombre de los autores, su afiliación profesional, así como su dirección electrónica, un resumen de una extensión máxima de cien palabras, abstract, palabras clave (hasta 5) y keywords, en Word para Windows.

Los gráficos e ilustraciones deben ser entregados en vectores (.ai) o en formato tif, jpg, pdf o eps **en alta definición** (es decir a 300 dpi); también deben insertarse en el artículo donde corresponda, **a modo de referencia ya que no serán tomados del word para su publicación**.



Los artículos deberán estar escritos en castellano.

Toda contribución propuesta será sometida a arbitraje de por lo menos dos evaluadores, notificándose a los autores sobre el status de la misma.

El resultado del dictamen puede ser:

- 1. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
- 2. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
- 3. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
- 4. Sugerencia de rechazo del artículo.

Los trabajos deben ser originales y sin compromiso de ser editados por otra publicación. Las opiniones expresadas por los autores en sus contribuciones son de su única responsabilidad. Estas no representan la opinión de la SOAREM.

El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación. El Comité Editorial queda autorizado por los autores para la publicación y difusión de los artículos enviados y publicados en Premisas, a través de la página web de SOAREM. En caso de ser publicado el trabajo, los autores recibirán un certificado digitalizado de publicación en el que se indica el link en el que se encuentra el artículo. No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en Premisa.

Los trabajos serán enviados a: revista.premisa@gmail.com

SOAREM

soarem1@gmail.com

www.soarem.org.ar

Personería Jurídica - Resolución Nº 000530 (31 de mayo 1999)
CUIT: 30-70309122-5