PROPUESTA PARA LAS ESCUELAS SECUNDARIAS: APROXIMACIONES Y VALORES EXACTOS

Liliana Aguilar Flores, Romina Domínguez, Paula Ortiz
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Ciudad de Buenos Aires, Argentina
lilaguilar05@gmail.com, jvgpd@hotmail.com, paulaortiz.212@gmail.com

RESUMEN

El objetivo del siguiente trabajo es el de mostrar una propuesta dirigida a estudiantes de escuelas secundarias para presentar y trabajar algunos conceptos básicos de métodos numéricos, introduciendo particularmente con el concepto de aproximaciones y valores exactos. Para comprender estos conceptos se les planteará a los alumnos una serie de problemas que, en una primera parte, desencadenarán las definiciones de error absoluto, error relativo, aritmética de redondeo y truncamiento; y en una segunda parte, integrarán estos conceptos en problemas de fácil resolución que involucren valores no exactos. Uno de los beneficios que trae esta propuesta es que su contenido al tener una aplicación directa con situaciones cotidianas facilita su aprendizaje promoviendo en los alumnos un mayor interés.

Palabras clave: aproximación, redondeo, resolución de problemas

APROXIMACIONES Y VALORES EXACTOS

En la actualidad nos encontramos en contacto con situaciones cotidianas en las que aplicamos ciertos conocimientos sobre la aproximación inconscientemente, y de la misma manera nos sirve para comprender que los instrumentos de medición también nos brindan resultados aproximados, es decir los más precisos, los que proporcionen el menor error posible. Estos conceptos son fundamentales puesto que son herramientas necesarias para trabajar con el conjunto de los números racionales, que se vale de él, para aplicarlo a la vida cotidiana, pero en el curriculum de la escuela no siempre se encuentra explicito como un tema más a ser enseñado.

La siguiente actividad está dirigida a alumnos de segundo año de la escuela secundaria. La proponemos con el objetivo de que los alumnos comprendan que todas las mediciones involucran un error que va a depender tanto del instrumento como de quien realiza la medición y del método que utiliza. Por esta razón, cuando se mide, siempre se obtiene un valor aproximado y lo importante es conocer cuál es el error máximo posible que se podría estar cometiendo al considerar ese valor.

LOS CONCEPTOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS UTILIZADOS EN ESTA PROPUESTA

Concepto de aritmética de redondeo. Concepto de aritmética de corte. Error relativo y Absoluto.

Las actividades propuestas están pensadas para alumnos de segundo año de secundaria, para ser trabajadas en las últimas semanas del ciclo lectivo.

PRIMERA ACTIVIDAD: ARITMÉTICA DE CORTE Y ARITMÉTICA DE REDONDEO

Esta primera parte de la propuesta se orienta tanto a comprender la importancia de la aritmética de corte y redondeo, como sus posibles consecuencias prácticas.

- Aritmética de corte o truncamiento:
  Un número decimal se trunca eliminando algunas cifras empezando por la derecha después del punto decimal.

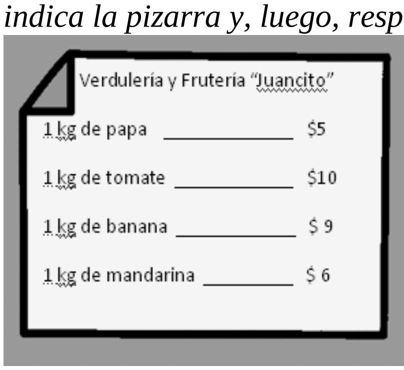
Por ejemplo: el truncamiento del número 0,7496 a una sola cifra decimal es 0,7.

- Aritmética de redondeo:
  Si se quiere redondear una cifra decimal dada, se considera la siguiente cifra, si esta es 0,1 ,2 ,3 ,4 ,5 el número se trunca; si es 6, 7, 8, 9 se suma 1 a la cifra del lugar considerada para redondear.

Por ejemplo: el redondeo del número 1,67837 a milésimos es igual a 1,678.

El problema que se propone a los alumnos es el siguiente:

Juan, el verdulero del barrio, tiene problemas para hacerle la cuenta a una clienta. Ayúdalo completando con el precio redondeado y truncado a un decimal, según lo que indica la pizarra y, luego, responde:



Lista de compras		
	Precio redondeado	Precio truncado
180 g de banana	$	$
470 g de mandarina	$	$
255 g de tomates	$	$
375 g de papa	$	$

a- ¿Qué columna de precios es la que más le conviene al verdulero? ¿Por qué?

Con esta actividad se pretende repasar conocimientos previos como la regla de tres simple, para calcular, en gramos, el precio de cada producto y luego con ellos que apliquen los conceptos adquiridos recientemente de aritmética de corte y redondeo analizando las diferencias que hay entre las distintas aproximaciones, y en función de ellas puedan elegir la más conveniente.

Para poder completar la tabla, los alumnos deberán buscar equivalencias, es decir, tener en cuenta que:

1000gr ——— 1 kg

Formulamos el planteo para cada fruta y hortaliza y así, por ejemplo, el precio de la banana estará dado por:

1000 gr ——— $9
180 gr ——— X

Por lo tanto, los 180 gr de banana costarán $1,62

Entonces, el cuadro quedará de la siguiente manera:

Lista de compras		
	Precio redondeado	Precio truncado
180 gr de banana	$ 1,6	$1,6
470 gr de mandarina	$ 2,8	$ 2,8
255gr de tomates	$ 2,2	$ 2,2
375 gr de papa	$ 1,9	$1,8

a) La columna de precio que más le conviene al verdulero será la columna de redondeo porque obtiene 0,10 ctvs. de ganancia.

SEGUNDA ACTIVIDAD: NO TODO ES EXACTO…

En esta actividad presentamos una problemática a través de la cual los alumnos deberán analizar qué herramientas utilizadas para medir un mismo objeto se aproxima más, al valor real brindado. De esta forma, deberán darse cuenta de que los instrumentos de medida trabajan con valores aproximados.

> *Los alumnos de segundo año realizan un cuadro con las medidas tomadas al pizarrón de su aula usando distintos instrumentos.*

Medida real del pizarrón= 1,60m	
Instrumento	Medida aproximada
Cinta métrica	1,59m
Cinta de costura	1,50m
Regla	1,35m
Metro	1,51m

Se solicitará que a partir de la información dada por el cuadro:

1. *Calculen las diferencias entre el valor real del pizarrón y los valores tomados con los distintos instrumentos. Colóquenlos en una nueva columna.*

Medida real del pizarrón= 1,60m		
Instrumento	Medida aproximada	
Cinta métrica	1,59m	
Cinta de costura	1,50m	
Regla	1,35m	
Metro	1,51m	

Las ideas que se van trabajando en esta etapa son las siguientes:

Esta diferencia significará cuánto nos hemos equivocado al realizar las mediciones. Llamaremos entonces **error absoluto** a la diferencia entre el valor medido y el valor real. Tomaremos en cuenta que este valor es siempre positivo.

$$Error\ absoluto = |valor\ obtenido - valor\ real|$$

Para indicar el error absoluto, junto a la medida obtenida, escribiremos el error absoluto con el signo $\pm$. Así diremos que la medida del pizarrón, según la regla, es 1,35$\pm$ 0,25 lo cual significa que esta medida se encuentra dentro del intervalo (1,35-0,25; 1,35+0,25)

Sin embargo, el error absoluto no nos permite comprobar si la medida es buena o de dos mediciones cuál es la mejor o la más conveniente. Para esto necesitamos conocer el **error relativo.**

El **error relativo** es el cociente entre el error absoluto y el valor medido. Podemos también multiplicar el error relativo por 100 para expresarlo en porcentaje. Es decir, se trata de comparar el error de la medida con la medida en sí. Esto nos permitirá comparar dos medidas (aquella con menor error relativo será mejor) y, más importante, determinará si el método empleado para medir es bueno. Si el error relativo cometido es inferior a 0,01, la medida será aceptable. Entonces:

$$Error\ relativo = \frac{error\ absoluto}{valor\ medido}$$

A continuación, se propone la siguiente actividad:

1. *A partir de las definiciones enunciadas, resuelve:*
   - *¿Qué nombre recibirá esta nueva columna?*
   - *En otra columna indiquen el intervalo en el que se encuentra el valor de verdad de cada una de las medidas tomadas.*
   - *Calculen el error relativo e indiquen cuál es el instrumento utilizado que tuvo más precisión.*

A partir de los conceptos presentados, Los alumnos completarán el cuadro agregando una columna que explicita la diferencia entre el valor real y el valor medido, a la cual nombrarán como Error Absoluto.

Medida real del pizarrón= 1,60m		
Instrumento	Medida aproximada	Error absoluto
Cinta métrica	1,59m	0,01
Cinta de costura	1,50m	0,1
Regla	1,35m	0,25
Metro	1,51m	0,09

Luego, completarán el ejercicio agregando el intervalo en el que se encuentra el valor real y el error relativo correspondiente a cada medida tomada.

Medida real del pizarrón= 1,60m				
Instrumento	**Medida aproximada**	**Error absoluto**	**Error relativo**	**Intervalos**
Cinta métrica	1,59m	0,01	0,00625	(1,58;1,60)
Cinta de costura	1,50m	0,1	0,0625	(1,40;1,60)
Regla	1,35m	0,25	0,15625	(1,10;1,60)
Metro	1,51m	0,09	0,05960	(1,42;1,60)

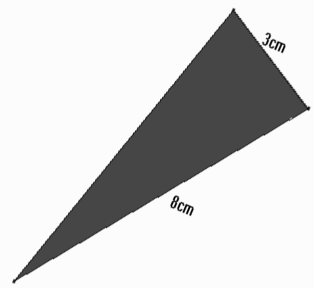
Sabiendo que si el error relativo es inferior a 0,01 es aceptable, entonces concluirán que el elemento con más precisión es la cinta métrica.

TERCERA ACTIVIDAD: INTEGRANDO LAS IDEAS VISTAS…

Los ejercicios propuestos a continuación tienen por objetivo integrar algunos conceptos previos del alumno que estén relacionados con los propuestos en este trabajo.

Elegimos un clásico problema de Pitágoras en el que el cateto a ser encontrado da como resultado un número irracional, para luego analizar y elegir la aproximación más acorde al ejercicio planteado.

Hallar la longitud del lado faltante en el siguiente triángulo rectángulo. (Utilizando el Teorema de Pitágoras)



a) *Aplicando la aritmética de redondeo a dos decimales y calcula el error absoluto y relativo cometido.*
b) *Aplicando la aritmética de corte a dos decimales y calcula el error absoluto y relativo cometido.*
c) *Comparando los resultados anteriores, indicar ¿cuál es el más aproximado y por qué?*

Para hallar el lado faltante aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2$$

$$\overline{ac}^2 = 8^2 - 3^2 \rightarrow \overline{ac} = \sqrt{55}$$

$$\sqrt{55} = 7{,}416198487....$$

Aplicando aritmética de redondeo a dos decimales:

- medida del lado=7,42.
- error absoluto= $\left|\sqrt{55} - 7{,}42\right| = 0{,}0038...$ cuya redondeo a tres decimales es 0,004.
- Error relativo= $\frac{0{,}004}{7{,}42} = 0{,}0005$

Aplicando aritmética de corte o truncamiento a dos decimales:

- Medida del lado=7,41
- Error absoluto= $\left|\sqrt{55} - 7{,}41\right| = 0{,}00619... \cong 0{,}01$
- Error relativo= $\frac{0{,}01}{7{,}41} = 0{,}001$

Entonces, comparando los errores relativos resulta que la medida más aproximada del lado faltante será la que arroja la aritmética por redondeo, pues 0,0005 es más chico que 0,001.

En esta etapa, se propone a los alumnos la resolución de una situación problemática en la que deberán comparar valores a través de la formulación de proporciones. Para dar respuestas a las preguntas formuladas, se verán necesitados de redondear los resultados aplicando los conceptos trabajados anteriormente y viendo cómo su aplicación se encuentra próxima a sus intereses.

La situación planteada al curso es la siguiente:

La tabla que sigue corresponde al ranking de los mejores futbolistas mundiales de este año.

Las ganancias	
Premios Oficiales de los futbolistas	
1ro. Lionel Messi	16.647.607 dólares
2do.Xavi Hernández	8.896.195 dólares
3er. Andrés Iniesta	7.173.198 dólares
4to.Ronaldo Cristiano	4. 323.497 dólares
5to.Wayne Rooney	3.656.136 dólares

Mirando la tabla calculen:

a) ¿Qué parte del dinero distribuido en premios entre los cinco primeros futbolistas le correspondió a Rooney?
b) ¿Qué parte de lo que ganó Messi le corresponde a Rooney?
c) ¿Qué parte del dinero distribuido corresponde a lo que ganó Messi?
d) Redondeen los resultados de los ítems anteriores a tres decimales y hallen el error absoluto cometido.

Para la resolución del ítem a) plantearemos la siguiente fracción:

$$\frac{3.656.136}{16.647.607+8.896.195+7.173.198+4.323.497+3.656.136}=\frac{3.656.136}{40.696.633}=0{,}0898...$$

Para la resolución del ítem b) plantearemos la siguiente fracción:

$$\frac{3.656.136}{16.647.607}=0{,}2196...$$

Para la resolución del ítem c) plantearemos esta última fracción:

$$\frac{16.647.607}{40.696.633}=0{,}4090...$$

Finalmente, los errores absolutos cometidos son:

a) $\left|\frac{3.656.136}{40.696.633}-0{,}09\right|=0{,}00016$

b) $\left|\frac{3.656.136}{16.647.607}-0{,}220\right|=0{,}00038$

c) $\left|\frac{16.647.607}{40.696.633}-0{,}409\right|=0{,}00006$

COMENTARIOS FINALES

Algunos de los beneficios de esta propuesta son:

- Permite la integración de diversos contenidos trabajados durante el año, por ello es conveniente que sea trabajada a fin del ciclo escolar.
- Su contenido tiene una aplicación directa con problemas de la vida cotidiana. Lo cual provocaría en los alumnos más motivación a la hora de aprender estos conceptos y en el momento de resolver los problemas.
- La aplicación de sus conceptos facilitan las operaciones y la comprensión de algún tema matemático sin que se pierda la esencia del problema.

Se pueden presentar dificultades:

- En la comprensión de que el error absoluto debe ser positivo ya que el error siempre se acumula, nunca se resta.
- Si los alumnos no tienen un buen manejo de los conceptos previos supuestos.

Los temas elegidos en esta propuesta forman parte de los conceptos básicos de la teoría de Métodos numéricos, y por medio de la misma pretendemos aplicarla a alumnos de segundo año de la escuela secundaria. La aritmética de redondeo o truncamiento será útil para aproximar el valor de razones que no son racionales con distintas cantidades decimales permitiendo operar con ellas, el calculo del error absoluto permitirá averiguar cuanto nos hemos equivocado al realizarlo y el error relativo determinará si el método empleado para aproximar es bueno. Todos estos conceptos serán útiles para realizar distintas actividades diariamente, como por ejemplo: poner precios, calcular ganancias y pérdidas, tomar medidas para confeccionar ropa o para la construcción de un mueble e incluso calcular el tiempo para realizar una actividad. Es decir, que ellos tienen una aplicación directa con problemas de la vida cotidiana.

Aunque las soluciones que ofrecen los métodos numéricos son aproximaciones de los valores reales y que; por lo tanto, se tendrá un cierto grado de error, lo importante será determinar valores que cometan el menor error posible para obtener la mayor precisión. Entonces, esta propuesta proporcionará, a las actividades cotidianas, una herramienta para tomar decisiones precisas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bindstein, M. (1993). *Matemática 1*. Buenos Aires: Aique.

Crespo Crespo, C. (2012). A*puntes de clase de Métodos numéricos.* Buenos Aires: Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”.

De Ulloa, A. (2004). *Introducción al método científico*. Consultada el 22 de Octubre de 2012, de http://recursos.cnice.mec.es/quimica/ulloa1/cursoulloa/tercero/pdf/d3.pdf